



URGC - Hydrologie Urbaine

Cours d'Hydrologie Urbaine

Partie 5

MODELISATION DES ECOULEMENTS EN RESEAU D'ASSAINISSEMENT

Jean-Luc BERTRAND-KRAJEWSKI

TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION	5
2. LES MODELES HYDRODYNAMIQUES	6
2.1 Le système de Barré de Saint-Venant	6
2.1.1 Etablissement de l'équation de continuité.....	6
2.1.2 Etablissement de l'équation dynamique.....	7
2.1.3 Etablissement du système de Barré de Saint-Venant	9
2.2 Modèles simplifiés	11
2.3 Evolution des variables Q , U , et h en fonction du temps pendant une crue	12
2.4 L'onde diffusante	13
2.5 L'onde cinématique.....	14
3. RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME DE BARRE DE SAINT-VENANT	15
3.1 Méthode des caractéristiques	15
3.2 Méthodes par éléments finis.....	18
3.3 Méthodes par différences finies	19
3.3.1 Introduction aux schémas par différences finies	19
3.3.2 Résolution du système par un schéma explicite	20
3.3.3 Résolution du système par un schéma implicite.....	22
4. RESOLUTION NUMERIQUE DE L'ONDE DIFFUSANTE	25
4.1 Schéma de résolution VPD	25
4.2 Conditions aux limites.....	25
4.3 Conditions sur les coefficients d'implication.....	26
4.4 Conditions sur les pas de discrétisation.....	26
4.5 Solution pseudo-analytique d'Hayami	27
5. RESOLUTION NUMERIQUE DE L'ONDE CINEMATIQUE.....	28
5.1 Schéma classique semi-explicite	28
5.1.1 Schéma de résolution	28
5.1.2 Conditions de stabilité.....	29
5.1.3 Diffusion numérique	29
5.2 Schéma adimensionnel de Ponce et Theurer (1982)	30
5.3 Schéma pseudo-analytique de Koussis (1976).....	30
5.4 Conditions sur Δx	32
5.5 Conditions sur Δt	32
6. LES MODELES CONCEPTUELS	33
6.1 Méthode du time-offset	33
6.2 Modèle Muskingum initial	34
6.3 Modèles dérivés non linéaires	37
7. MODELISATION DES ECOULEMENTS EN CHARGE	39
7.1 Problèmes liés à la modélisation des mises en charge.....	39
7.2 Méthode du stockage.....	39
7.3 Méthode de la translation simple	40
7.4 Méthode de la fente de Preissmann.....	40
7.5 Méthode INSA	40
8. TABLEAU RECAPITULATIF	43
9. BIBLIOGRAPHIE.....	44

NOTATIONS

a	pas de discrétisation des schémas aux différences finies
A_i	coefficient dans les schémas aux différences finies
A_i'	coefficient dans les schémas aux différences finies
$A(i)$	vecteurs dans les schémas aux différences finies
b	pas de discrétisation des schémas aux différences finies
B	largeur au miroir (m)
B_i	coefficient dans les schémas aux différences finies
B_i'	coefficient dans les schémas aux différences finies
$B(i)$	vecteurs dans les schémas aux différences finies
C	célérité de l'onde (m/s)
Cc	caractéristiques des conduites
C_f	coefficient de frottement (m/s ²)
C_h	coefficient de Chézy (m ^{1/2} /s)
C_m	valeur moyenne de C (m/s)
C_i	coefficient dans les schémas aux différences finies
C_i'	coefficient dans les schémas aux différences finies
$C(i)$	vecteurs dans les schémas aux différences finies
Co	nombre de Courant
Cr	nombre de Reynolds local
C_1, C_2, C_3	coefficients numériques tels que $C_1 + C_2 + C_3 = 1$
C^+, C^-	courbes caractéristiques
D	coefficient de diffusion (m ² /s)
D_h	diamètre hydraulique (m)
D_i	coefficient dans les schémas aux différences finies
D_i'	coefficient dans les schémas aux différences finies
D_m	valeur moyenne de D (m ² /s)
D_n	diffusion numérique des schémas de résolution
E_i	coefficient dans les schémas aux différences finies
E_i'	coefficient dans les schémas aux différences finies
f	fonction quelconque
f_c	coefficient de Colebrook (-)
\bar{f}	force de frottement
F	nombre de Froude
g	accélération de la pesanteur (m/s ²)
h	hauteur d'eau par rapport au radier ou au fond (m)
h_0	= $h + z$ hauteur d'eau par rapport à une cote fixe (m)
h_{max}	hauteur d'eau maximum (m)
H	hauteur de mise en charge (m)
i	indice de pas d'espace pour les grandeurs hydrauliques (voir U_i^n par exemple)
I	pente du radier (m/m)
I_c	= Q_i pour tout instant t
I_1	= Q_i^n
I_2	= Q_i^{n+1}
j	indice quelconque
J	perte de charge (m/m)
k	coefficient numérique
k_m	durée de propagation (s) dans le modèle d'Hayami
k_r	rugosité (m)
K	paramètre des modèles type Muskingum (s)
K_d	débitance (m ³ /s)

K_{ms}	coefficient de Manning-Strickler ($m^{1/3}/s$)
L_b	longueur du bief ou du tronçon (m)
L_j	longueur partielle de bief (m)
m	exposant dans les modèles de type Muskingum non linéaire
n	indice de pas de temps pour les grandeurs hydrauliques (voir U_i^n par exemple)
N	nombre total de pas d'espace sur un bief ou un tronçon
P_{atm}	pression atmosphérique (Pa ou mCE)
P^*	pression absolue (Pa ou mCE)
q	débit latéral éventuel entrant ($\varepsilon = 0$) ou sortant ($\varepsilon = 1$) (m^2/s)
Q	débit (m^3/s)
Q_c	= Q_{i+1} pour tout instant t
Q_e	débit d'entrée d'un bief ou d'un tronçon (m^3/s)
Q_{max}	débit maximum (m^3/s)
Q_s	débit de sortie d'un bief ou d'un tronçon (m^3/s)
Q_1	= Q_{i+1}^n
Q_2	= Q_{i+1}^{n+1}
R_c	rayon de courbure (m)
R_h	rayon hydraulique (m)
S	section mouillée (m^2)
t	temps (s)
T_o	temps de transit d'une onde (time-offset) dans le modèle de la translation simple (s)
T_P	temps de parcours (s)
T_r	temps de montée de la crue (s)
U	vitesse moyenne de l'écoulement (m/s)
U'	coefficient dans les schémas aux différences finies
\bar{U}	vitesse moyenne pondérée (m/s)
U_i^n	vitesse d'écoulement au pas d'espace $i\Delta x$ et au pas de temps $n\Delta t$ (m/s)
U_{max}	vitesse maximum (m/s)
V	vitesse d'écoulement sur une ligne de courant (m/s)
V'	coefficient dans les schémas aux différences finies
V_s	volume stocké dans un bief (m^3)
W'	coefficient dans les schémas aux différences finies
x	abscisse (m)
X'	coefficient dans les schémas aux différences finies
Y'	coefficient dans les schémas aux différences finies
z	altitude du radier ou du fond par rapport à une cote fixe (m)
Z	nombre adimensionnel caractérisant la diffusivité
Z'	coefficient dans les schémas aux différences finies
α	coefficient de pondération dans les modèles type Muskingum
α_j	coefficients d'implication dans les schémas aux différences finies
β	coefficient numérique
χ	abscisse (m)
δ	coefficient numérique
Δx	pas d'espace (m)
Δt	pas de temps (s)
ε	coefficient de transfert de la quantité de mouvement du débit latéral q
γ	coefficient de Bazin ($m^{1/2}$)
$\bar{\gamma}$	vecteur accélération (m/s^2)
λ	coefficient d'implication pour l'onde diffusante
μ	coefficient d'implication pour l'onde diffusante
ν	viscosité cinématique (m^2/s)
θ	coefficient de pondération pour l'onde cinématique
ρ	masse volumique du fluide (kg/m^3)
τ	temps (s)
χ	abscisse (m)

$\Omega(i)$ vecteurs dans les schémas aux différences finies
 ξ coefficient numérique
 ζ coefficient numérique

1. INTRODUCTION

« L'étude mathématique des écoulements à surface libre en régime transitoire n'est pas une discipline scientifique récente. Elle a débuté il y a déjà plus de 200 ans lors de l'essor de l'ensemble des théories mécaniques, avec les travaux de Laplace en 1776 et de Lagrange vers 1781 sur la propagation des ondes à la surface des canaux. Dès 1871, Barré de Saint-Venant a formulé mathématiquement, par un système d'équations différentielles, le mouvement des eaux à surface libre pouvant faire l'objet d'une description filaire. Depuis lors, ces équations servent de base aux modèles mathématiques d'écoulement à surface libre » en rivière, en canaux et en réseau d'assainissement (d'après Kovacs, 1988).

Pour modéliser la propagation des écoulements en réseau d'assainissement, on distingue classiquement deux grandes familles de modèles :

- les modèles issus de la mécanique des fluides et de l'hydraulique, appelés modèles hydrodynamiques, dérivés du modèle complet de Barré de Saint-Venant (1871) ;
- les modèles issus de la dynamique des systèmes, appelés souvent modèles globaux ou conceptuels, du type Muskingum ou réservoir linéaire par exemple.

Deux aspects importants doivent être pris en compte pour la modélisation des écoulements en réseau d'assainissement :

- la complexité des réseaux : collecteurs, ouvrages spéciaux (nécessitant des modèles spécifiques), singularités hydrauliques (avec application de conditions aux limites particulières couplées avec l'utilisation des modèles de propagation en collecteur) ;
- la complexité des écoulements, notamment les influences aval, les maillages du réseau, et surtout les mises en charge qui créent des problèmes très particuliers de compatibilité entre modèles d'écoulement à surface libre et modèles d'écoulement en charge.

Dans cette partie du cours, nous traiterons successivement :

- les modèles hydrodynamiques de propagation des écoulements à surface libre en collecteur ;
- les modèles conceptuels ;
- la prise en compte des mises en charge.

La modélisation des ouvrages spéciaux, notamment les déversoirs d'orage, est traitée dans un document séparé.

2. LES MODELES HYDRODYNAMIQUES

2.1 LE SYSTEME DE BARRE DE SAINT-VENANT

Ce chapitre débute par un rappel des équations de base permettant de décrire le mouvement d'un fluide dans le cas d'un écoulement à surface libre non permanent. On établit d'abord les équations de base avant de poser le système de Barré de Saint-Venant et ses simplifications possibles.

2.1.1 Etablissement de l'équation de continuité

L'équation de continuité exprime la conservation de la masse au sein du bief, donc des volumes si on considère que le fluide est incompressible, ce qui est le cas pour l'eau dans les conditions applicables en rivière ou en réseau d'assainissement. On considère le bief de longueur dx représenté Figure 2.1.

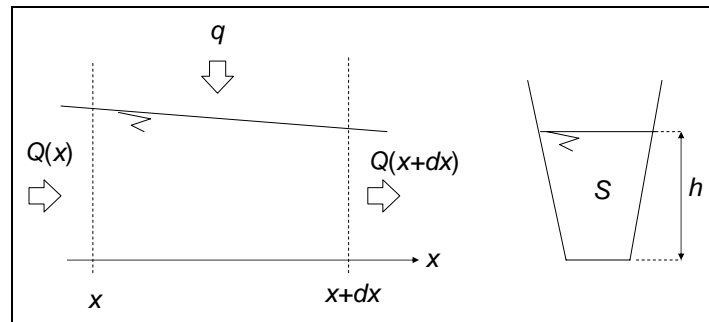


Figure 2.1 : Equation de continuité

On recherche le volume stocké au temps $t+dt$ dans l'espace compris entre x et $x+dx$. Ce volume $V_s(t+dt)$ est égal au volume entrant à l'abscisse x durant dt , plus le volume stocké entre x et $x+dx$ à l'instant t , moins le volume sortant à l'abscisse $x+dx$ durant dt , plus éventuellement le volume extérieur entrant dans le bief entre les abscisses x et $x+dx$ durant dt . Ce volume s'écrit, avec $Q(x,t)$ le débit, $S(x,t)$ la section mouillée, $q(t)$ le débit latéral extérieur (par unité de longueur) et $h(x,t)$ la hauteur d'eau :

$$V_s(t+dt) = \int_t^{t+dt} Q(x,\tau) d\tau + \int_x^{x+dx} S(\chi,t) d\chi - \int_t^{t+dt} Q(x+dx,\tau) d\tau + \int_t^{t+dt} q(\tau) dx d\tau$$

D'autre part, le volume $V_s(t+dt)$ s'exprime aussi sous la forme :

$$V_s(t+dt) = \int_x^{x+dx} S(\chi,t+dt) d\chi$$

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$\int_x^{x+dx} (S(\chi,t+dt) - S(\chi,t)) d\chi = \int_t^{t+dt} (Q(x,\tau) - Q(x+dx,\tau) + q(\tau) dx) d\tau$$

En considérant que les fonctions $S(x,t)$ et $Q(x,t)$ sont continues, on peut modifier les termes comme suit :

$$\int_x^{x+dx} (S(\chi,t+dt) - S(\chi,t)) d\chi = dx \cdot (S(x+a,t+dt) - S(x+a,t)) \quad \text{avec } x+a \in [x, x+dx]$$

$$\int_t^{t+dt} (Q(x,\tau) - Q(x+dx,\tau) + q(\tau)) d\tau = dt \cdot (Q(x,t+b) - Q(x+dx,t+b) + q(t+b) dx) \quad \text{avec } t+b \in [t, t+dt]$$

En reprenant l'égalité précédente et en substituant, on obtient, en divisant par $dxdt$:

$$\frac{S(x+a, t+b) - S(x+a, t)}{dt} = \frac{Q(x, t+b) - Q(x+a, t+b)}{dx} + q(t+b)$$

Comme dx et dt sont petits et tendent vers zéro, les termes précédents correspondent aux dérivées partielles des fonctions et on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = q(t)$$

Notons que si l'écoulement est permanent, $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ et il reste uniquement $\frac{dQ}{dx} = q$.

2.1.2 Etablissement de l'équation dynamique

On s'intéresse à un petit élément de volume liquide au sein d'un écoulement, suffisamment petit pour que les grandeurs physiques y soient homogènes. Cela revient à considérer une « particule » de fluide au sein de l'écoulement. A partir de l'équilibre des forces auxquelles est soumise cette particule, et en supposant le fluide incompressible, on obtient l'équation de Navier-Stokes avec les variables d'Euler (Carlier, 1986 ; Lencastre, 1996 ; Graf et Altinakar, 1993, 1996) :

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P^* - \vec{f}$$

avec

P^* pression (kg/m/s²)
 ρ masse volumique du fluide (kg/m³)

$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ vecteur accélération (m/s²)

\vec{f} forces de frottement (m/s²)

On considère un filet liquide représentant la trajectoire de la particule située au point M. Soit \vec{s} la tangente et \vec{n} la normale à la trajectoire au point M (Figure 2.2).

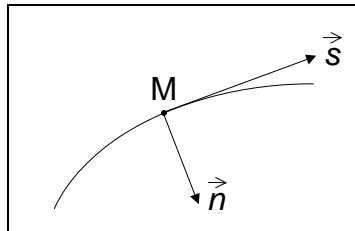


Figure 2.2 : Trajectoire d'une "particule" de fluide

En projetant sur ces deux axes l'équation de Navier-Stokes, on obtient le système suivant :

$$\text{sur la tangente } s : \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial s} - f_s$$

$$\text{sur la normale } n : \frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V_s^2}{Rc} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial n} - f_n$$

avec Rc rayon de courbure (m).

En toute généralité, la dérivée partielle de la vitesse sur la tangente par rapport au temps est non nulle et ne peut pas être simplifiée :

$$\frac{\partial V_s}{\partial t} \neq 0$$

Si on fait l'hypothèse que la pente du radier ou du fond est faible et que les filets liquides sont parallèles au fond, alors

$$Rc \rightarrow \infty$$

$$fn = 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial P^*}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial Vn}{\partial t} = 0$$

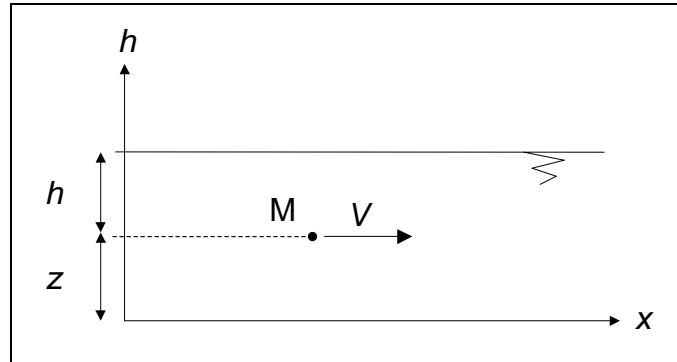


Figure 2.3 : Ecoulement monodimensionnel selon un axe Ox

La répartition des pressions est hydrostatique. Si on assimile \vec{s} à l'axe \vec{x} d'un écoulement mono-dimensionnel (Figure 2.3), le système d'équations précédent se simplifie et il reste uniquement, en notant V la vitesse de la particule de fluide le long de l'axe Ox :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} - f$$

On développe l'expression de P^* pour poursuivre les calculs :

$$P^* = P_{atm} + \rho g(z + h)$$

avec

- P_{atm} la pression atmosphérique (Pa)
- h la hauteur d'eau au-dessus du filet liquide passant au point M (m)
- z l'altitude du filet liquide par rapport à une cote fixe (m)
- g accélération de la pesanteur (m/s^2)

On a donc

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\partial P_{atm}}{\partial x} + \rho g \frac{\partial z}{\partial x} + \rho g \frac{\partial h}{\partial x}$$

Si on fait l'hypothèse que la pression atmosphérique ne varie pas avec x ($\partial P_{atm}/\partial x = 0$), et en notant $I = -\partial z/\partial x$ la pente du fond, il vient

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = gI - f$$

En notant $J = \frac{f}{g}$ la perte de charge par frottement due à la rugosité des parois et à la viscosité du fluide, on écrit

finalement :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J)$$

On a considéré jusqu'à présent une particule de fluide se déplaçant à la vitesse V . Soit U la vitesse moyenne d'écoulement à travers la section mouillée S (hypothèse de Bernoulli). On peut alors écrire $V = kU$, avec k un coefficient appelé coefficient de répartition.

L'équation précédente peut alors s'écrire directement avec la vitesse moyenne U et on obtient l'équation dynamique, en admettant que k est une constante :

$$k \frac{\partial U}{\partial t} + k^2 U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J)$$

En pratique, on peut simplifier l'équation en adoptant $k \approx 1$, hypothèse vérifiée pour un écoulement turbulent – voir Chow (1973) ou Graf et Altinakar (2000).

2.1.3 Etablissement du système de Barré de Saint-Venant

On considère un fluide incompressible. En supposant que

- l'écoulement est monodimensionnel selon un axe Ox ,
- la pente du fond est faible ($\alpha = \sin \alpha = \tan \alpha$),

on peut écrire le système d'équations S1 établi pour la première fois par Barré de Saint-Venant en 1871 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{équation de continuité (ou de conservation de la masse) :} \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \end{array} \right. \quad \text{Eq. 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{équation dynamique (ou de conservation de l'énergie ou de la quantité de mouvement) :} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J) + (\varepsilon - 1)q \frac{U}{S} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 2}$$

avec

h hauteur d'eau (m)

I pente (m/m)

J perte de charge (m/m)

ε coefficient de transfert de la quantité de mouvement du débit latéral q , variant de 0 à 1

q débit latéral éventuel entrant ou sortant par unité de longueur (m^2/s)

Q débit (m^3/s)

S section mouillée (m^2)

t temps (s)

U vitesse moyenne de l'écoulement sur la section S (m/s)

x abscisse (m)

Si le débit latéral q est orthogonal à la direction Ox , on prend $\varepsilon = 0$: ce débit latéral n'apporte (s'il est entrant) ni n'emporte (s'il est sortant) aucune quantité de mouvement à l'écoulement principal. Si le débit latéral est parallèle à Ox , on prend $\varepsilon = 1$. Dans les cas intermédiaires, la valeur de ε est comprise entre 0 et 1.

S , Q , U et h sont des fonctions continues des deux variables x et t . Avec la perte de charge J , cela conduit à un système comportant 5 inconnues dès lors que les caractéristiques physiques du bief (aussi appelé tronçon lorsqu'il s'agit d'un réseau d'assainissement) sont définies.

Pour résoudre le système S1, trois hypothèses complémentaires doivent être faites.

Hypothèse 1 : les pertes de charges en régime transitoire sont supposées être calculables de la même manière que pour les écoulements permanents. On a ainsi une expression du type

$$J = f(Q, U, h, \dots) \quad \text{Eq. 3}$$

Différentes formules existent dans la littérature (voir manuels classiques d'hydraulique à surface libre, Carlier, 1986 ; Graf et Altinakar, 1993, 1996, 2000 ; Chow, 1973 ; Henderson, 1966), par exemple :

– Formule de Chézy :

$$J = \frac{U^2}{C_h^2 R_h} \quad \text{Eq. 4}$$

avec C_h coefficient de Chézy ($\text{m}^{1/2}/\text{s}$) et R_h rayon hydraulique (m).

– Formule de Manning-Strickler :

$$J = \frac{U^2}{K_{ms}^2 R_h^{4/3}} = \frac{Q^2}{K_{ms}^2 S^2 R_h^{4/3}} \quad \text{Eq. 5}$$

avec K_{ms} coefficient de Manning-Strickler ($m^{1/3}/s$).

Il existe plusieurs possibilités pour définir le coefficient de Chézy, à partir des caractéristiques du matériau constituant la paroi des collecteurs :

- formule du coefficient de frottement à la paroi C_f :

$$C_h^2 = \frac{2g}{C_f} \quad \text{Eq. 6}$$

- formule de Bazin :

$$C_h = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_h}}} \quad \text{Eq. 7}$$

avec γ coefficient de Bazin ($m^{1/2}$) qui dépend du matériau.

- formule de Manning-Strickler :

$$C_h = K_{ms} R_h^{1/6} \quad \text{Eq. 8}$$

En assainissement, cette dernière formule est la plus communément utilisée. Le coefficient K_{ms} varie entre 25 pour les tuyaux rugueux (briques, maçonneries, etc.) et 100 pour les tuyaux les plus lisses (PVC). Une valeur moyenne typique pour les collecteurs en béton est $K_{ms} = 65-70 m^{1/3}/s$.

Hypothèse 2 : la distribution des pressions est hydrostatique et l'accélération verticale est négligeable.

Hypothèse 3 : il faut deux autres relations pour avoir autant d'équations que d'inconnues. On utilise alors les relations reliant la section mouillée S à la hauteur d'eau h , et l'expression du débit Q en fonction de la section mouillée S et de la vitesse moyenne U :

$$S = f(h) \quad \text{Eq. 9}$$

$$Q = SU \quad \text{Eq. 10}$$

On obtient alors le système complet S2 de 5 équations à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} S = f(h) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 9}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = SU \end{array} \right. \quad \text{Eq. 10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J = f(Q, U, h, \dots) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \end{array} \right. \quad \text{Eq. 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J) + (\varepsilon - 1)q \frac{U}{S} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 2}$$

Il faut également définir des conditions aux limites amont et aval du bief et des conditions initiales pour $t = 0$.

Ce modèle est le plus complet et le plus général. Il est applicable sur un bief régulier, c'est à dire un tronçon de caractéristiques homogènes.

Le système S2 ne possède pas de solution analytique. Il faut donc le résoudre numériquement. Pour cela, plusieurs familles de méthodes numériques sont utilisables :

- résolution par la méthode des caractéristiques (très rarement utilisée en hydrologie urbaine) ;
- résolution par éléments ou volumes finis ;
- résolution par des schémas de différences finies (la plus utilisée actuellement en hydrologie urbaine).

Ces différentes méthodes de résolution du système de Barré de Saint-Venant font l'objet du chapitre 3.

2.2 MODELES SIMPLIFIES

Avant d'aborder les méthodes de résolution, nous allons étudier les simplifications possibles des équations du système de Barré de Saint-Venant. Dans la suite, afin d'alléger les écritures, nous considérerons qu'il n'y a pas d'apport latéral, c'est à dire $q = 0$.

L'équation de continuité Eq. 1 n'est pas simplifiable et devient :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{Eq. 11}$$

L'équation dynamique Eq. 2 comprend plusieurs termes, numérotés ici de (1) à (5) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J) \quad \text{Eq. 12}$$

(1) (2) (3) (4) (5)

Ils correspondent respectivement à :

- (1) Premier terme d'inertie (énergie due à l'accélération dans la direction Ox)
- (2) Deuxième terme d'inertie (accélération convective)
- (3) Terme de pression, lié à la pente de la surface libre
- (4) Terme de gravité
- (5) Terme de frottement, lié aux pertes de charge.

Selon les ordres de grandeur relatifs des différents termes, des simplifications de l'Eq. 12 sont possibles. En effet, il est rare que tous les termes aient le même ordre de grandeur, en fonction des caractéristiques géométriques et des conditions aux limites. Différentes études théoriques et expérimentales portant sur la propagation d'une crue ont permis de montrer (Preissmann 1971, Kovacs, 1988) que le terme d'inertie (1) est lié au temps, donc à la vitesse de montée de la crue et que le terme d'accélération convective (2) est lié à la géométrie des conduites. Par exemple, pour les crues en rivières, on a observé que (1) et (2) étaient négligeables devant les autres termes de l'équation. Les termes (4) et (5) de pente et de frottement sont en général du même ordre de grandeur. Il est possible de procéder alors à des simplifications, selon les ordres de grandeur respectifs des différents termes.

Modèles à inertie prépondérante et frottements négligeables : les termes (4) et (5) sont négligés, d'où :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{Eq. 13}$$

Le modèle donné par l'Eq. 13 est appelé *modèle de l'onde dynamique*. En pratique, il correspond à des ondes de haute fréquence (impulsions brèves et rapprochées) qui ne sont pas des situations fréquentes en hydrologie urbaine où ce modèle est très peu employé.

Modèles à frottements prépondérants et inertie négligeable : les termes (1) et (2) sont négligés. Dans ce cas, on obtient le *modèle de l'onde diffusante* :

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J) \quad \text{Eq. 14}$$

Si de plus le terme (3) est négligé, on obtient le *modèle de l'onde cinématique* :

$$g(I - J) = 0 \Leftrightarrow I = J \quad \text{Eq. 15}$$

Ces deux modèles donnent des résultats satisfaisants pour simuler le fonctionnement des réseaux d'assainissement.

Le modèle de l'onde dynamique, généré par les termes d'inertie, et le modèle de l'onde diffusante ne correspondent pas nécessairement à un déplacement de matière, comme dans le cas de la houle par exemple. A l'inverse, le modèle de l'onde cinématique correspond à un déplacement réel de matière. On distingue ainsi le déplacement réel du fluide à la vitesse U et le déplacement de l'onde de débit à la célérité C .

Ces deux grandeurs permettent de définir le nombre de Froude F par la relation :

$$F = \frac{U}{C} \quad \text{Eq. 16}$$

Si $F < 1$, l'écoulement est dit fluvial (ou infracritique), les ondes se déplacent plus vite que le fluide. Elles peuvent se propager vers l'amont ou vers l'aval. Il faut donc, pour résoudre les équations, poser des conditions aux limites amont et aval.

Si $F > 1$, l'écoulement est dit torrentiel (ou supercritique), les ondes se déplacent moins vite que le fluide et se propagent toujours vers l'aval. Pour résoudre les équations, une condition à la limite amont est suffisante.

Si $F = 1$, l'écoulement est dit critique. Cet état est instable et n'apparaît normalement que de manière transitoire.

La résolution numérique des modèles simplifiés de l'onde diffusante et de l'onde cinématique sera présentée aux chapitres 4 et 5.

2.3 EVOLUTION DES VARIABLES Q , U , ET h EN FONCTION DU TEMPS PENDANT UNE CRUE

Au cours d'une crue, en une section donnée, les variations relatives des variables Q , U , et h en fonction du temps t sont représentées Figure 2.4 et Figure 2.5.

Dans cette section, on observe successivement (Figure 2.4) :

- la vitesse maximum U_{max} ;
- le débit maximum Q_{max} ;
- la hauteur maximum h_{max} .

La largeur de la boucle indique l'importance des termes d'inertie et de pression dans l'équation de l'onde dynamique (Figure 2.5). Pour une hauteur h donnée, il existe deux débits Q_1 et Q_2 différents selon que l'on se situe durant la crue ou durant la décrue.

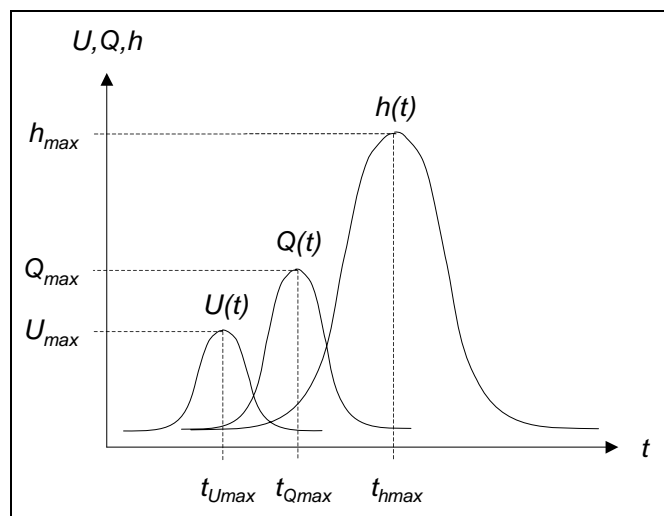


Figure 2.4 : Evolution des variables U , Q , et h en fonction du temps t au cours d'une crue

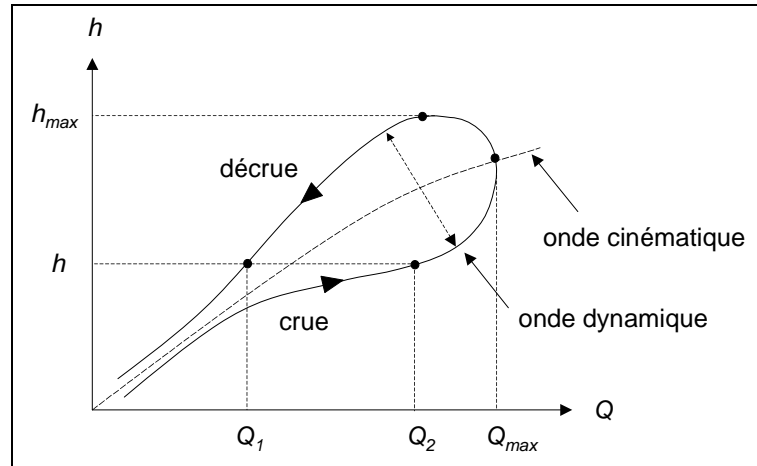


Figure 2.5 : Evolution des variables h et Q en une section donnée au cours d'une crue

2.4 L'ONDE DIFFUSANTE

Le système initial de Barré de Saint-Venant se ramène au cas suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 & \text{Eq. 11} \\ \frac{\partial h}{\partial x} = I - J & \text{Eq. 17} \end{cases}$$

Si on dérive l'Eq. 11 par rapport à x à t constant et l'Eq. 17 par rapport à t à x constant (voir démonstration par exemple dans Kovacs 1988), on peut éliminer l'une des deux variables h ou Q . Si on choisit d'éliminer h , ce qui permet souvent de simplifier l'expression des conditions aux limites, il reste une équation unique en Q qui s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad \text{Eq. 18}$$

avec

C célérité de l'onde, correspondant au déplacement de l'onde de crue (m/s)

D coefficient de diffusion, correspondant à l'atténuation de l'onde de crue (m^2/s).

Les variables C et D sont données par les relations suivantes :

$$C = \frac{dQ}{dS} + \frac{D}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - J \frac{\partial B}{\partial y} \right) \quad \text{Eq. 19}$$

$$D = \frac{Q}{2BJ} \approx \frac{Q}{2BI} \quad \text{Eq. 20}$$

avec B la largeur au miroir (m), et en admettant pour D que J est voisin de I . B est une fonction de la hauteur d'eau h :

$$B = \frac{\partial S}{\partial h} \quad \text{Eq. 21}$$

Les conditions aux limites amont et aval sont du type $Q(t)$. La résolution de l'Eq. 18 demande de calculer C et D . Pour cela, différentes méthodes de calcul existent, que nous verrons ultérieurement (chapitre 4).

Si on considère, comme cela est souvent fait, que C et D sont indépendants du temps, il existe alors une solution analytique à l'équation de l'onde diffusante : c'est le modèle d'Hayami.

Cunge (1969) a montré que l'onde de crue diffusante est analogue à une résolution particulière du modèle Muskingum (voir chapitre 6). En effet, avec un schéma particulier de différences finies, le modèle Muskingum

peut être considéré comme une approximation à l'ordre 2 du modèle de l'onde diffusante. Cette démonstration est très intéressante car elle permet de relier l'approche hydrodynamique mécaniste et l'approche conceptuelle.

2.5 L'ONDE CINEMATIQUE

L'équation de l'onde cinématique correspond à un écoulement où :

- l'énergie due à la crue est négligeable devant les forces de pesanteur ;
- l'aval n'a aucune influence sur l'amont ;
- il existe une relation directe $Q = f(h)$ appelée courbe de jaugeage (ou courbe de tarage ou courbe d'étalonnage). Il existe plusieurs expressions possibles de ce type de relation, par exemple :

- relation de Chézy $Q = C_h S \sqrt{R_h I}$ Eq. 22

- relation de Manning – Strickler $Q = K_{ms} S I^{1/2} R_h^2$ Eq. 23

- autres relations $Q = a.h^b$ a et b coefficients numériques Eq. 24

Le système d'équations à résoudre devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ I = J \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Eq. 11} \\ \text{Eq. 15} \end{matrix}$$

L'Eq. 15 correspond au fait que la ligne d'eau est supposée parallèle au fond du tronçon d'écoulement.

Si $I = J$, $Q = Q(S)$ car Q ne dépend alors que de la section S , $\Rightarrow S = S(Q)$

donc $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{dQ} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}$

On pose $C = \frac{dQ}{dS}$ et on peut écrire en substituant dans l'équation de continuité :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{1}{C} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Le système d'équations peut donc se réduire à une seule équation :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{Eq. 25}$$

avec C la célérité de l'onde.

Si C ne dépend pas du débit Q (donc du temps), on retrouve l'équation de la translation simple et sans déformation de l'onde de crue :

$$Q_s(t + T_0) = Q_e(t) \quad \text{Eq. 26}$$

avec

Q_s le débit de sortie du bief (m^3/s)

Q_e le débit d'entrée du bief (m^3/s)

T_0 le temps de translation (time-offset) de l'onde le long du bief (s)

Si C dépend du débit, il y a déformation de l'onde de crue.

3. RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME DE BARRE DE SAINT-VENANT

3.1 METHODE DES CARACTERISTIQUES

On se place dans le plan (x, t) et on cherche les courbes caractéristiques, c'est à dire les courbes où il existe une relation entre le temps et l'espace. Cette relation est utilisée pour remplacer les équations aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles totales. La méthode n'est applicable facilement que sous certaines conditions, notamment le fait que la section d'écoulement soit rectangulaire. De plus, le schéma de résolution n'est pas nécessairement conservatif car on est conduit à assimiler les courbes caractéristiques à des droites. Cette méthode des caractéristiques, si elle est une des premières à avoir été mise en œuvre historiquement pour le calcul notamment de la propagation des crues en rivière (où la valeur élevée du rapport B/h permet d'assimiler facilement la section d'écoulement à une section rectangulaire), est très peu utilisée en pratique pour les calculs en hydrologie urbaine. Elle est présentée ici à titre d'information.

Dans le cas d'un canal rectangulaire, le système S2 sans apport latéral s'écrit ;

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 & \text{Eq. 11} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J) & \text{Eq. 12} \end{cases}$$

En utilisant $Q = SU$ dans la première équation Eq. 11, il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial S}{\partial x} = 0 & \text{Eq. 27} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J) & \text{Eq. 12} \end{cases}$$

Or, pour une section rectangulaire, $S = Bh$, et donc

$$\frac{\partial S}{\partial h} = B, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} B \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial x} = B \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{Eq. 28}$$

D'où le nouveau système qui ne contient plus que les variables U et h :

$$\begin{cases} B \frac{\partial h}{\partial t} + Bh \frac{\partial U}{\partial x} + BU \frac{\partial h}{\partial x} = 0 & \text{Eq. 29} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J) & \text{Eq. 12} \end{cases}$$

D'autre part, les différentielles totales s'écrivent :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad \text{Eq. 30}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad \text{Eq. 31}$$

Les quatre équations Eq. 29, Eq. 12, Eq. 30 et Eq. 31 ci-dessus comportent quatre inconnues :

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial U}{\partial t}.$$

On applique alors la méthode de Stoker (Graf et Altinakar, 1996), qui propose de calculer la célérité de l'onde C par la relation :

$$C = \sqrt{g \frac{S}{\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)}} \quad \text{Eq. 32}$$

Dans le cas d'un canal rectangulaire, puisque $S = Bh$, on obtient simplement

$$C = \sqrt{gh} \quad \text{ou} \quad C^2 = gh \quad \text{ou} \quad h = C^2 / g \quad \text{Eq. 33}$$

Si on différencie cette expression, on obtient une relation simple entre C et h :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial t} \quad \text{Eq. 34}$$

On transforme alors le système d'équations pour l'exprimer uniquement avec les variables U et C :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{C^2}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 35}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{2C}{g} \frac{\partial C}{\partial x} = g(I - J) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 36}$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial C}{\partial t} + C \frac{\partial U}{\partial x} + 2U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 37}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + 2C \frac{\partial C}{\partial x} = g(I - J) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 38}$$

On calcule à présent la somme et la différence des deux équations du système précédent, c'est à dire (Eq. 37 + Eq. 38) et (Eq. 37 - Eq. 38). Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (2C + U) + \frac{\partial U}{\partial x} (C + U) + \frac{\partial C}{\partial x} (2U + 2C) = g(I - J) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 39}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (2C - U) + \frac{\partial U}{\partial x} (C - U) + \frac{\partial C}{\partial x} (2U - 2C) = -g(I - J) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 40}$$

D'où, après réarrangement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U + C) \frac{\partial}{\partial x} \right) (U + 2C) = g(I - J) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 41}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U - C) \frac{\partial}{\partial x} \right) (U - 2C) = g(I - J) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 42}$$

Les arguments de gauche peuvent représenter des différentielles totales. En effet, on a

$$d(U + 2C) = \frac{\partial(U + 2C)}{\partial t} dt + \frac{\partial(U + 2C)}{\partial x} dx \quad \text{Eq. 43}$$

Et donc :

$$\frac{d(U + 2C)}{dt} = \frac{\partial(U + 2C)}{\partial t} + \frac{\partial(U + 2C)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad \text{Eq. 44}$$

En substituant dans l'Eq. 41 et dans l'Eq. 42, on obtient respectivement :

$$\frac{d(U + 2C)}{dt} = g(I - J) \quad \text{avec} \quad \frac{dx}{dt} = U + C \quad \text{Eq. 45}$$

et

$$\frac{d(U - 2C)}{dt} = g(I - J) \quad \text{avec} \quad \frac{dx}{dt} = U - C \quad \text{Eq. 46}$$

La célérité de l'onde par rapport au sol (ou au radier du canal) vaut donc $\frac{dx}{dt} = U \pm C$. Si on a $U + C$, la propagation de l'onde a lieu vers l'aval ; si on a $U - C$, la propagation de l'onde a lieu vers l'amont.

Si on se place sur les courbes $\frac{dx}{dt} = U \pm C$, les équations se simplifient et deviennent, en faisant l'hypothèse que les frottements sont négligeables, c'est à dire en considérant $I = J$:

$$U + 2C = Cte \quad \text{sur une courbe } C^+ \text{ définie par } \frac{dx}{dt} = U + C,$$

$$U - 2C = Cte \quad \text{sur une courbe } C^- \text{ définie par } \frac{dx}{dt} = U - C.$$

Il est possible de représenter la propagation de l'onde dans un espace à trois dimensions (x, t, h) comme indiqué Figure 3.1. Les courbes C^+ et C^- , appelées courbes caractéristiques, peuvent être tracées dans le plan (x, t) , comme indiqué Figure 3.2.

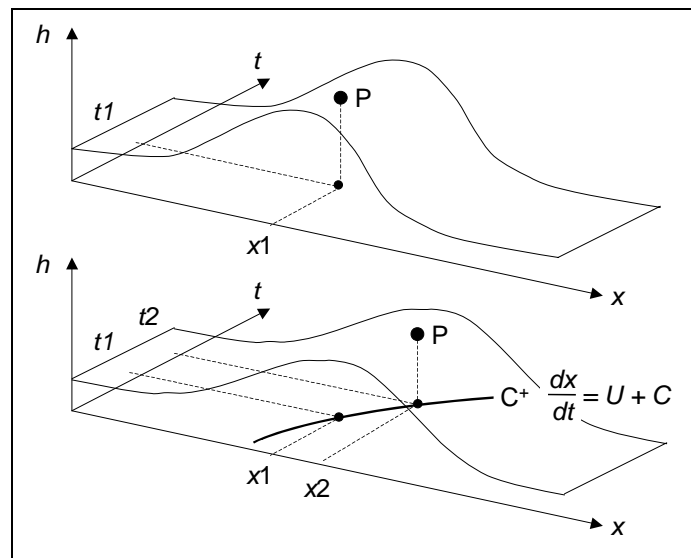


Figure 3.1 : Représentation dans l'espace (x, t, h) de la propagation d'une onde et de la courbe C^+ correspondante

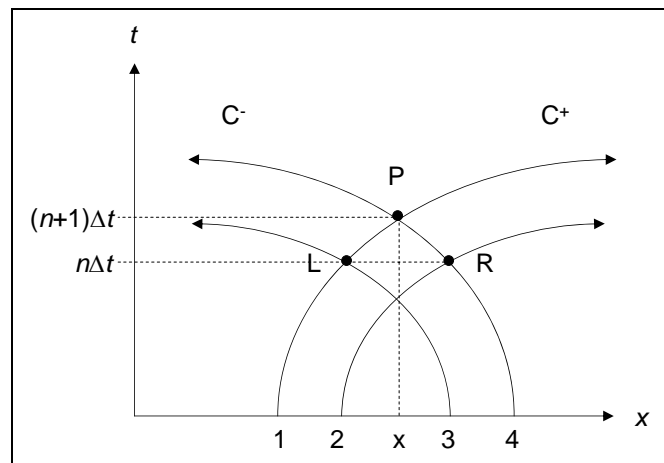


Figure 3.2 : Propagation d'une onde dans le plan (x, t)

Sur la Figure 3.2, aux points notés L et R, on connaît les vitesses de l'écoulement notées respectivement U_L et U_R , et les hauteurs h_L et h_R . On résout les équations pour U et h au point P en parcourant le plan (x, t) . Pour cela, on résout en remplaçant les différentielles totales par des différences finies qui constituent des approximations d'ordre 1 lorsque l'on assimile les courbes C^+ ou C^- à des segments de droites.

On peut alors écrire sur la courbe C^+ :

$$\begin{cases} (U_P - U_L) + \sqrt{\frac{g}{h_L}}(h_P - h_L) - (t_P - t_L)(g(I - J_L)) = 0 & \text{Eq. 47} \\ (x_P - x_L) = (U_L + \sqrt{gh_L})(t_P - t_L) & \text{Eq. 48} \end{cases}$$

et sur la courbe C^- :

$$\begin{cases} (U_P - U_R) - \sqrt{\frac{g}{h_R}}(h_P - h_R) - (t_P - t_R)(g(I - J_R)) = 0 & \text{Eq. 49} \\ (x_P - x_R) = (U_R - \sqrt{gh_R})(t_P - t_R) & \text{Eq. 50} \end{cases}$$

On a ainsi 4 équations et 4 inconnues : x_P , t_P , U_P et U_L . La résolution du système conduit directement à :

$$t_P = \frac{(x_L - x_R) + t_R(U_R - \sqrt{gh_R}) - t_L(U_L + \sqrt{gh_L})}{(U_R - U_L) - (\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R})} \quad \text{Eq. 51}$$

$$x_P = x_L + (U_L + \sqrt{gh_L})(t_P - t_L) \quad \text{Eq. 52}$$

Ce sont les coordonnées du point P dans le plan (x, t) . D'autre part, on détermine :

$$h_P = \frac{(U_L - U_R) + (\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + (t_P - t_L)g(I - J_L) - (t_P - t_R)g(I - J_R)}{(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R})} \quad \text{Eq. 53}$$

$$U_P = U_L - \sqrt{\frac{g}{h_L}}(h_P - h_L) + (t_P - t_L)g(I - J_L) \quad \text{Eq. 54}$$

On a donc une expression explicite de U_P et h_P en tout point du plan (x, t) . Il faut définir des conditions aux limites amont et aval (U et h en $x = 0$ et en $x = L_b$ longueur du bief) et une condition initiale (U et h pour $t = 0$).

Il faut par ailleurs vérifier la conditions de Courant-Friedrich-Levy :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(U + C)} \quad \text{Eq. 55}$$

En pratique, lorsque l'on discrétise le plan (x, t) avec des pas Δx et Δt , on commet une erreur car les points de calcul L et R ne sont pas nécessairement situés aux intersections du maillage. Cela conduit à faire des approximations supplémentaires par rapport à celle faite en prenant des différences finies à l'ordre 1. Les erreurs de calcul par rapport à la solution exacte augmentent lorsque Δx augmente. Il faut donc choisir Δx suffisamment petit, mais cela conduit souvent à prendre aussi Δt petit et donc à une quantité de calculs importante (Daubert *et al.*, 1967). De plus, pour des sections non rectangulaires, les calculs deviennent beaucoup plus complexes et des instabilités numériques apparaissent, ce qui contribue au désintérêt actuel pour cette méthode de résolution.

3.2 METHODES PAR ELEMENTS FINIS ET VOLUMES FINIS

Les méthodes de résolution par éléments finis ou volumes finis sont encore rarement utilisées en hydrologie urbaine et ne seront pas présentées dans ce document. On peut toutefois mentionner les articles de Cooley et Moin (1976) et Taylor *et al.* (1974). Une présentation générale de ces méthodes est donnée par exemple dans Crossley (1999).

3.3 METHODES PAR DIFFERENCES FINIES

3.3.1 Introduction aux schémas par différences finies

Les méthodes de résolution par différences finies sont actuellement les plus utilisées en hydrologie urbaine. Il existe différentes méthodes de résolution en fonction des schémas numériques mis en œuvre. La méthode de résolution par différences finies consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs algébriques établis à partir de développements en série de Taylor. Nous ne ferons ici qu'un bref rappel des notions indispensables relatives aux différences finies et nous renvoyons aux cours et ouvrages d'analyse numérique pour une information complète sur ces méthodes de résolution (par Rappaz et Picasso, 1998 ; Euvrard ; 1988).

On considère une fonction f de deux variables : une variable d'espace x et une variable de temps t : $f = f(x, t)$. Les dérivées partielles par rapport à x s'expriment de la manière suivante. On pose, avec a petit :

$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x) + \theta_1(a)$$

$$f(x-a) = f(x) - af'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x) + \theta_2(a)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, la dérivée est calculée par la relation suivante (schéma centré avec approximation d'ordre 2) :

$$f'(x) = \frac{f(x+a) - f(x-a)}{2a} \quad \text{Eq. 56}$$

On peut également utiliser les relations négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 seulement, ce qui conduit

– soit à un schéma progressif (ou avancé) avec approximation d'ordre 1 :

$$f'(x) = \frac{f(x+a) - f(x)}{a} \quad \text{Eq. 57}$$

– soit à un schéma régressif (ou retardé) avec approximation d'ordre 1 :

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-a)}{a} \quad \text{Eq. 58}$$

Si on remplace a par un pas d'espace Δx , il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{Eq. 59}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

Selon le pas de temps auquel sont calculées les dérivées partielles par rapport à x , on utilise soit des schémas explicites lorsque toutes les valeurs de f sont calculées au pas de temps $n\Delta t$, soit des schémas implicites lorsque les valeurs de f sont calculées au pas de temps $(n+1)\Delta t$. Il est également possible d'utiliser un schéma implicite combinant les deux types de schémas précédents, appelé schéma mixte.

Pour simplifier les écritures, nous noterons i l'indice relatif au pas d'espace et n l'indice relatif au pas de temps. Dans ces conditions, on peut écrire

$$f(i\Delta x, n\Delta t) = f_i^n$$

Dans le cas le plus général, on peut donc écrire une dérivée partielle par rapport à x sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_3 \frac{\alpha_1 (f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}) + (1 - \alpha_1)(f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1})}{\Delta x} + (1 - \alpha_3) \frac{\alpha_2 (f_{i+1}^n - f_i^n) + (1 - \alpha_2)(f_i^n - f_{i-1}^n)}{\Delta x} \quad \text{Eq. 60}$$

Selon les différentes pondérations effectuées, on obtient les différents schémas possibles indiqués Tableau 3.1. Il existe ainsi de très nombreuses possibilités de choix de schémas aux différences finies pour les dérivées partielles par rapport à x .

$\alpha_3 = 0$		schéma explicite, ne dépendant que du pas de temps n
$\alpha_3 = 0.5$		schéma implicite centré dans le temps, dépendant des pas de temps n et $n+1$
$\alpha_3 = 1$		schéma implicite, ne dépendant que du pas de temps $n+1$
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 1$	schéma progressif
$\alpha_1 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.5$	schéma centré
$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 1$	schéma régressif
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 0$	schéma mixte décentré

Tableau 3.1 : coefficients de pondération des schémas aux différences finies

D'autre part, la dérivée partielle de f par rapport au temps t est calculée selon le même principe, avec une pondération possible selon que les valeurs de f sont calculées au pas d'espace $i\Delta x$ ou $(i+1)\Delta x$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\alpha_4 (f_i^{n+1} - f_i^n) + (1 - \alpha_4)(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n)}{\Delta t} \quad \text{Eq. 61}$$

Une fois les discrétisations choisies, on substitue leurs expressions dans le système d'équations à résoudre. L'équation différentielle initiale est ainsi remplacée par un système de N équations contenant N inconnues, à résoudre pour chaque pas de temps.

Dans le cas des schémas explicites, les dérivées partielles par rapport à x sont calculées au pas de temps n et seules les dérivées partielles par rapport à t contiennent des termes calculés au pas de temps $n+1$. On peut ainsi calculer explicitement les valeurs f_i^{n+1} à partir des valeurs f_i^n .

Dans le cas des schémas implicites, on ne peut calculer les valeurs de f au pas de temps $n+1$ qu'en résolvant le système formé des N équations linéaires algébriques du schéma.

3.3.2 Résolution du système par un schéma explicite

On utilise un schéma explicite centré avec une approximation d'ordre 2 par rapport à l'espace, et d'ordre 1 progressif par rapport au temps (Figure 3.3). On pose

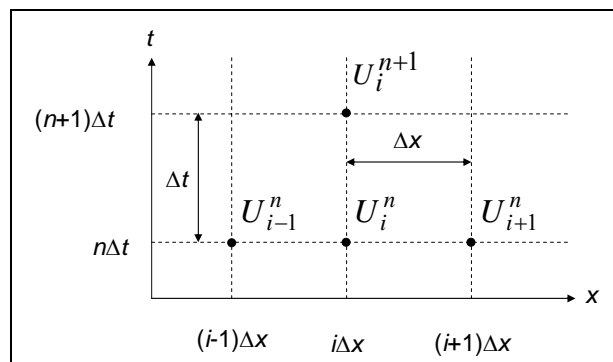


Figure 3.3 : Schéma de résolution explicite

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{Eq. 62}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{Eq. 63}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t}$$

On substitue ces opérateurs dans l'équation dynamique Eq. 12 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= g(I - J) \\ \Leftrightarrow \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + U_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + g \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} &= g(I - J_i^n) \end{aligned} \quad \text{Eq. 64}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \quad 2\Delta x(U_i^{n+1} - U_i^n) + \Delta t U_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + g\Delta t (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) &= 2g\Delta x\Delta t(I - J_i^n) \\ \Leftrightarrow 2\Delta x U_i^{n+1} - 2\Delta x U_i^n &= 2g\Delta x\Delta t(I - J_i^n) - \Delta t U_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) - g\Delta t (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) \end{aligned}$$

et finalement

$$U_i^{n+1} = U_i^n + g\Delta t(I - J_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(U_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + g(h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) \right) \quad \text{Eq. 65}$$

avec J_i^n calculé par la formule de Manning-Strickler.

On substitue dans l'équation de continuité Eq. 11 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial SU}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Or $S = f(h)$ sur un bief donné. Donc

$$S \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Pour une section rectangulaire, on a $S = Bh$, d'où $\frac{\partial S}{\partial x} = B \frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial S}{\partial t} = B \frac{\partial h}{\partial t}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} Bh_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + BU_i^n \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} + B \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} &= 0 \\ \Leftrightarrow h_i^n \Delta t (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \Delta t U_i^n (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) + 2\Delta x (h_i^{n+1} - h_i^n) &= 0 \\ \Leftrightarrow h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(h_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + U_i^n (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) \right) \end{aligned} \quad \text{Eq. 66}$$

Pour résoudre complètement le système, il faut fixer des conditions aux limites amont et aval, c'est-à-dire U_0^n et h_0^n à l'amont et U_L^n et h_L^n à l'aval $\forall n$, et les conditions initiales U_i^0 et $h_i^0 \forall i$. De plus, le schéma doit vérifier la condition de Courant-Friedrich-Levy exprimée sous la forme :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|U \pm C|} \quad \text{avec } C = \sqrt{2g \frac{S(h)}{S'(h)}} = \sqrt{2gh} \quad \text{dans le cas de la section rectangulaire.}$$

Si on fixe Δx , alors Δt est imposé.

Dans le cas d'une section non rectangulaire, les calculs sont plus complexes car il faut conserver les expressions complètes de $S(h)$ et $S'(h)$. Ce qui conduit aux expressions suivantes pour la dérivée partielle de S :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

D'où, après substitution dans l'équation dynamique, les calculs suivants :

$$\begin{aligned} S \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ S_i^n \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} &= 0 \\ S_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + U_i^n \frac{\partial S}{\partial h} \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\partial S}{\partial h} \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} &= 0 \\ S_i^n \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{\Delta t} + U_i^n \frac{\partial S}{\partial h} \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{\Delta t} + \frac{\partial S}{\partial h} \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta t} &= 0 \\ 2 \frac{\partial S}{\partial h} \Delta x h_i^{n+1} - 2 \frac{\partial S}{\partial h} \Delta x h_i^n &= -\Delta t S_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) - \Delta t U_i^n \frac{\partial S}{\partial h} (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) \\ \frac{\partial S}{\partial h} h_i^{n+1} &= \frac{\partial S}{\partial h} h_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(S_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + U_i^n \frac{\partial S}{\partial h} (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) \right) \end{aligned}$$

qui conduisent finalement à

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{S_i^n}{\frac{\partial S_i^n}{\partial h}} (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + U_i^n (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) \right) \quad \text{Eq. 67}$$

3.3.3 Résolution du système par un schéma implicite

Pour éviter la contrainte sur les pas d'espace et de temps liée à la condition de Courant-Friedrich-Levy (c'est-à-dire des pas de temps courts, donc des temps de calculs longs), on utilise des schémas implicites. Il en existe de très nombreux. Nous présenterons ici celui de Preissmann qui est un des plus utilisés en hydrologie urbaine.

On pose les opérateurs généraux suivants (Figure 3.4) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(\alpha_1 (f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}) + (1 - \alpha_1) (f_{i+1}^n - f_i^n))}{\Delta x} \quad \text{Eq. 68}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(\alpha_2 (f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n) + (1 - \alpha_2) (f_i^{n+1} - f_i^n))}{\Delta t} \quad \text{Eq. 69}$$

avec α_1 et α_2 compris entre 0 et 1.

Pour $\alpha_2 = 0.5$, on obtient le schéma classique de Preissmann. On a alors plusieurs choix possibles pour la valeur de α_1 :

- si $\alpha_1 = 0$ le schéma est explicite ;
- si $\alpha_1 = 0.5$ le schéma est implicite centré ;
- si $\alpha_1 = 1$ le schéma est implicite.

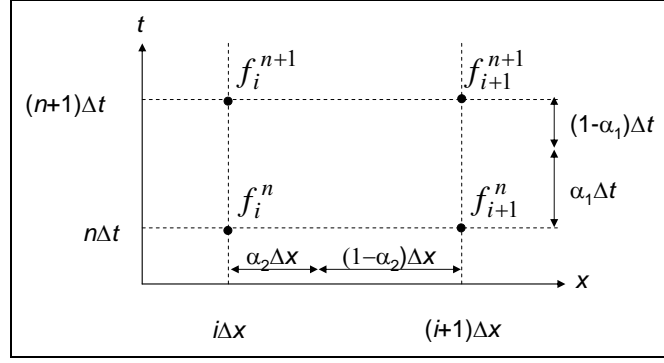


Figure 3.4 : Schéma de résolution implicite de Preissmann

Pour garantir la stabilité du schéma numérique, des considérations théoriques montrent qu'il faut choisir $\alpha_1 \geq 2/3$.

Avec $\alpha_2 = 0.5$, les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_{i+1}^n}{2\Delta t} + \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{2\Delta t} \quad \text{Eq. 70}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{2\Delta t} + \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{2\Delta t} \quad \text{Eq. 71}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \alpha_1 \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \alpha_1) \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x} \quad \text{Eq. 72}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \alpha_1 \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \alpha_1) \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \quad \text{Eq. 73}$$

On modifie l'écriture du système initial de Barré de Saint-Venant de la manière suivante, en travaillant avec les deux variables h et Q . On note $S = Bh$,

d'où $\frac{\partial S}{\partial t} = B \frac{\partial h}{\partial t}$. Le système s'écrit alors, en substituant U par Q/S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 74}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \frac{\partial h_0}{\partial x} + gS \frac{Q|Q|}{K_d^2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 75}$$

avec K_d la débitance définie par la relation $K_d^2 I = Q |Q|$ et $h_0 = h + z$ la cote verticale par rapport à une référence fixe (et non par rapport au radier). On substitue ensuite les opérateurs algébriques des différences finies dans le système précédent et on obtient :

– pour l'équation de continuité :

$$\frac{h_{i+1}^{n+1} - h_{i+1}^n}{2\Delta t} + \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{2\Delta t} + \frac{2}{\Delta x} \frac{\alpha_1(Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (1 - \alpha_1)(Q_{i+1}^n - Q_i^n)}{\alpha_1(B_{i+1}^{n+1} + B_i^{n+1}) + (1 - \alpha_1)(B_{i+1}^n + B_i^n)} \quad \text{Eq. 76}$$

– pour l'équation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{2\Delta t} + \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{2\Delta t} \right) + \left(\frac{\alpha_1}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{S} \right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{Q^2}{S} \right)_i^{n+1} \right] + \frac{1-\alpha_1}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{S} \right)_{i+1}^n - \left(\frac{Q^2}{S} \right)_i^n \right] \right) \\
& + g \left(\frac{\alpha_1}{2} (S_{i+1}^{n+1} + S_i^{n+1}) + \frac{1-\alpha_1}{2} (S_{i+1}^n + S_i^n) \right) \times \\
& \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{\Delta x} (h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}) + \frac{1-\alpha_1}{\Delta x} (h_{i+1}^n - h_i^n) \right) + \left(\frac{\alpha_1}{2} (Q_{i+1}^{n+1} |Q_{i+1}^{n+1}| + Q_i^{n+1} |Q_i^{n+1}|) + \frac{1-\alpha_1}{2} (Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n| + Q_i^n |Q_i^n|) \right) \right. \\
& \left. \times \left(\frac{\alpha_1}{2} \left((K_{d_{i+1}}^{n+1})^2 + (K_{d_i}^{n+1})^2 \right) + \frac{1-\alpha_1}{2} \left((K_{d_{i+1}}^n)^2 + (K_{d_i}^n)^2 \right) \right)^{-1} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{Eq. 77}$$

On note, pour simplifier les écritures, $f^{n+1} = f^n + \Delta f$, et on pose directement, puisqu'aucun autre indice n 'est nécessaire, $f^{n+1} = f + \Delta f$.

Tous calculs faits, et après regroupement des termes en h et Q , on obtient pour l'équation de continuité :

$$A_i \Delta h_{i+1} + B_i \Delta Q_{i+1} = C_i \Delta h_i + D_i \Delta Q_i + E_i \tag{Eq. 78}$$

et pour l'équation dynamique :

$$A_i' \Delta h_{i+1} + B_i' \Delta Q_{i+1} = C_i' \Delta h_i + D_i' \Delta Q_i + E_i' \tag{Eq. 79}$$

On doit ensuite résoudre ces systèmes $\forall i$ de 0 à L_b pour obtenir les valeurs de h_{i+1} et Q_{i+1} au pas de temps $(n+1)\Delta t$. On réitère la résolution pour les pas de temps suivants, avec, à chaque fois, l'application des conditions aux limites amont et aval. Les coefficients $A_i, B_i, \dots, E_i, A_i', B_i', \dots, E_i'$ peuvent être calculés à un pas de temps donné $n\Delta t$ (représentant les conditions initiales) si les valeurs de h_i, Q_i, h_{i+1} et Q_{i+1} sont connues à ce même pas de temps. On adopte ainsi la technique dite de double balayage : à chaque pas de temps, on calcule les valeurs des variables pour tous les points de l'espace, et on progresse ensuite de pas de temps en pas de temps.

4. RESOLUTION NUMERIQUE DE L'ONDE DIFFUSANTE

4.1 SCHEMA DE RESOLUTION VPD

Comme pour la résolution du système complet de Barré de Saint-Venant, de nombreux schémas de résolution sont possibles. Un des plus classiques est celui proposé par Price pour les crues de rivières, appelé schéma VPD (Variable Parameter Diffusion). Il s'agit d'un schéma implicite.

On pose $Q_i^{n+1} = Q_i^n + \Delta Q_i^n$, ce qui revient à avoir pour inconnue du système la variation de Q entre les pas de temps successifs n et $n+1$, et non plus la valeur de Q au pas de temps $n+1$. Avec cette notation, on écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\Delta Q_i^n}{\Delta t} \quad \text{Eq. 80}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\lambda(Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (1-\lambda)(Q_i^n - Q_{i-1}^n)}{\Delta x} \quad \text{Eq. 81}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\mu(Q_{i+1}^{n+1} - 2Q_i^{n+1} + Q_{i-1}^{n+1}) + (1-\mu)(Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n)}{\Delta x^2} \quad \text{Eq. 82}$$

avec λ et μ coefficients d'implication compris entre 0 et 1.

En reportant les expressions calculées dans l'équation de l'onde diffusante, on obtient un système de N équations (une pour chaque pas d'espace), à résoudre successivement pour chaque pas de temps, sous la forme :

$$X' \Delta Q_{i-1}^n + Y' \Delta Q_i^n + Z' \Delta Q_{i+1}^n = U' \Delta Q_{i-1}^n + V' \Delta Q_i^n + W' \Delta Q_{i+1}^n \quad \text{Eq. 83}$$

Les coefficients X' , Y' , Z' , U' , V' , W' sont calculés en fonction des paramètres C , D , λ , μ , Δx et Δt .

En passant sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} B(1) & A(2) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ C(1) & B(2) & A(3) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & C(i-1) & B(i) & A(i+1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & C(N-2) & B(N-1) & A(N) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & C(N-1) & B(N) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta Q_1^n \\ \Delta Q_2^n \\ \vdots \\ \Delta Q_i^n \\ \vdots \\ \Delta Q_{N-1}^n \\ \Delta Q_N^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega(1) \\ \Omega(2) \\ \vdots \\ \Omega(i) \\ \vdots \\ \Omega(N-1) \\ \Omega(N) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 84}$$

avec les vecteurs $A(i)$, $B(i)$, $C(i)$ et $\Omega(i)$ exprimés en fonction des coefficients X' , Y' , Z' , U' , V' , W' et des débits calculés au pas de temps précédent Q_{i-1}^n , Q_i^n et Q_{i+1}^n .

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle compacte suivante : $|PM| \cdot |\Delta Q| = |\Omega|^n$. Après inversion de la matrice $|PM|$, on obtient $|\Delta Q|^n = |PM|^{-1} \cdot |\Omega|^n$, c'est à dire :

$$|Q|^{n+1} = |Q|^n + |\Delta Q|^n \quad \text{Eq. 85}$$

$|Q|^n$ étant la matrice des débits à chaque pas d'espace $i\Delta x$ pour le pas de temps $n\Delta t$.

4.2 CONDITIONS AUX LIMITES

La première équation du système linéaire à résoudre

$$B(1)\Delta Q_1^n + A(2)\Delta Q_2^n = \Omega(1) \quad \text{Eq. 86}$$

utilise la condition à la limite amont $Q(0, (n+1)\Delta t)$.

La dernière équation du système

$$C(N-1)\Delta Q_{N-1}^n + B(N)\Delta Q_N^n = \Omega(N) \quad \text{Eq. 87}$$

utilise la condition à la limite aval $Q(L_b, (n+1)\Delta t)$ avec $L_b = N\Delta x$.

Or, a priori, on ne connaît pas la condition à la limite aval car c'est généralement le débit que l'on cherche à calculer. Il existe plusieurs possibilités pour résoudre cette difficulté.

La première consiste à faire l'hypothèse que le débit au pas d'espace $(N-1)\Delta x$ est égal au débit au pas d'espace $N\Delta x$. Cela revient à supposer soit que Δx est petit et que les variations de débit sont faibles entre deux pas d'espace à l'aval du bief, soit qu'on a atteint un régime d'écoulement uniforme à l'aval du bief.

La deuxième consiste à faire l'hypothèse que le débit aval $Q(N\Delta x, (n+1)\Delta t)$ est le débit qui se trouvait au pas de temps précédent à la distance $C\Delta t$ à l'amont, avec C la célérité de l'onde. D'où l'expression de la condition limite aval $Q(N\Delta x, (n+1)\Delta t) = Q(N\Delta x - C\Delta t, n\Delta t)$, la valeur de $(N\Delta x - C\Delta t)$ étant calculée par interpolation. C étant variable au cours du temps, le calcul doit être itératif.

4.3 CONDITIONS SUR LES COEFFICIENTS D'IMPLICITATION

Avec les notations utilisées dans ce paragraphe, nous avons les schémas possibles suivants en fonction des valeurs des coefficients d'implicitation :

- si $\lambda = 0$ le schéma est explicite ;
- si $\lambda = 0.5$ le schéma est implicite centré dans le temps ;
- si $\lambda = 1$ le schéma est totalement implicite.

Par ailleurs, on observe que

- si $0 \leq \lambda \leq 0.5$ le schéma est instable ;
- si $0.5 \leq \lambda \leq 1$ le schéma est stable.

La stabilité du schéma numérique dépend également des paramètres μ , Δx et Δt . Il faut donc étudier la diffusion des termes numériques d'ordre 2, c'est à dire calculer l'écart entre la solution exacte et la solution approchée. Une analyse détaillée (Kovacs, 1988) montre qu'il faut choisir λ supérieur à 0.5 pour garantir la stabilité numérique, mais en même temps λ proche de 0.5 pour limiter la diffusion numérique.

4.4 CONDITIONS SUR LES PAS DE DISCRETISATION

Il est judicieux de choisir les pas de discrétisation Δx et Δt de telle sorte que Δx soit très voisin de $C\Delta t$. Cette condition n'est pas toujours aisée à respecter, surtout pour des pentes de radier supérieures à 1 % car C est alors très variable.

On rappelle que C est calculée par la relation :

$$C = \frac{dQ}{dS} + \frac{D}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - J \frac{\partial B}{\partial y} \right) \quad \text{Eq. 19}$$

4.5 SOLUTION PSEUDO-ANALYTIQUE D'HAYAMI

En faisant l'hypothèse que C et D sont indépendants du temps, Hayami a établi une solution analytique pour l'équation de l'onde diffusante. On utilise le produit de convolution suivant :

$$Q(x,t) = \int_0^t Q(0,\tau) \Phi_1(x,t-\tau) d\tau \quad \text{Eq. 88}$$

avec

$$\Phi_1(x,\tau) = \frac{x}{2\sqrt{\pi D_m} \tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x - C_m \tau)^2}{4D_m \tau}\right) \quad \text{Eq. 89}$$

où C_m et D_m sont les valeurs moyennes de C et D .

En fonction des conditions initiales et en passant sous une forme adimensionnelle, la solution proposée par Hayami donne $Q(x,t)$ sous la forme :

$$Q(x,t) = Q(x,0) + \int_0^t (Q(0,t-\tau) - Q(0,0)) \Phi_2(x,\tau) d\tau \quad \text{Eq. 90}$$

avec

$$\Phi_2(x,\tau) = \sqrt{\frac{k_m Z}{\pi \tau^3}} \exp\left(Z \left(2 - \frac{\tau}{k_m} - \frac{k_m}{\tau}\right)\right) \quad \text{Eq. 91}$$

où $Z = \frac{C_m \cdot x}{4D_m}$ est un nombre adimensionnel caractérisant la diffusivité de l'écoulement

et $k_m = \frac{x}{C_m}$ a la dimension d'un temps et correspond à la durée de propagation d'une onde de translation simple.

5. RESOLUTION NUMERIQUE DE L'ONDE CINEMATIQUE

Comme pour l'onde dynamique ou l'onde diffusante, il existe de très nombreuses méthodes de résolution (Weinmann et Laurenson, 1979). Nous en présenterons quelques-unes parmi les plus courantes dans ce chapitre.

5.1 SCHEMA CLASSIQUE SEMI-EXPLICITE

5.1.1 Schéma de résolution

On pose le schéma de discrétisation dans le plan (x, t) présenté Figure 5.1, avec les notations suivantes :

$$I_1 = Q(i\Delta x, n\Delta t)$$

$$I_2 = Q(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$$

$$Q_1 = Q((i+1)\Delta x, n\Delta t)$$

$$Q_2 = Q((i+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)$$

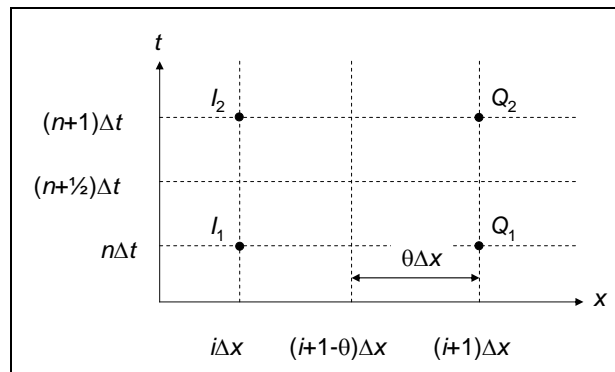


Figure 5.1 : Schéma de discrétisation classique de résolution de l'onde cinématique

On choisit les opérateurs suivants pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \theta \frac{I_2 - I_1}{\Delta t} + (1 - \theta) \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta t} \quad \text{Eq. 92}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{Q_1 - I_1}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_2 - I_2}{\Delta x} \quad \text{Eq. 93}$$

On reporte ensuite ces opérateurs dans l'équation de l'onde cinématique, avec $I = J$ et sans apport latéral :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{Eq. 25}$$

On obtient

$$\frac{\theta(I_2 - I_1) + (1 - \theta)(Q_2 - Q_1)}{\Delta t} + C \frac{Q_1 - I_1 + Q_2 - I_2}{2\Delta x} = 0$$

d'où

$$Q_2 = C_1 I_1 + C_2 I_2 + C_3 Q_1 \quad \text{Eq. 94}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{2\theta\Delta x + C\Delta t}{2(1-\theta)\Delta x + C\Delta t} \\ C_2 = \frac{C\Delta t - 2\theta\Delta x}{2(1-\theta)\Delta x + C\Delta t} \\ C_3 = \frac{2(1-\theta)\Delta x - C\Delta t}{2(1-\theta)\Delta x + C\Delta t} \\ C_1 + C_2 + C_3 = 1 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 95}$$

Il suffit d'avoir une condition limite amont pour pouvoir résoudre entièrement le système. On fixe donc la première valeur de I_2 pour $x = 0$. La condition limite aval est sans intérêt car l'onde cinématique se propage toujours de l'amont vers l'aval : aucune information ne peut remonter de l'aval vers l'amont.

Si on note $K = \Delta x/C$, les coefficients deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{2K\theta + \Delta t}{2K(1-\theta) + \Delta t} \\ C_2 = \frac{\Delta t - 2K\theta}{2K(1-\theta) + \Delta t} \\ C_3 = \frac{2K(1-\theta) - \Delta t}{2K(1-\theta) + \Delta t} \\ C_1 + C_2 + C_3 = 1 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 96}$$

et K correspond au temps de parcours (Weinmann et Laurenson, 1979). On obtient les mêmes résultats que pour l'une des formes de résolution du modèle Muskingum (voir paragraphe 6.2).

5.1.2 Conditions de stabilité

Le schéma numérique est stable s'il vérifie la condition $C\Delta t \leq \Delta x$. De plus,

- si $0 \leq \theta \leq 0.5$ le schéma est stable ;
- si $0.5 \leq \theta \leq 1$ le schéma est instable.

En pratique, on observe que le schéma reste stable si

$$-0.5 \leq \theta \leq 0.5 \quad \text{Eq. 97}$$

5.1.3 Diffusion numérique

- Si $\theta \geq 0.5$ il n'y a pas de diffusion numérique (et même amplification de l'onde ce qui est irréaliste) ;
- si $\theta \leq 0.5$ il existe une diffusion numérique D_n donnée par la relation :

$$D_n = -C\Delta x(\theta - 0.5) \quad \text{Eq. 98}$$
- si $\theta = 0.5$ il y a translation simple de l'hydrogramme et un stockage distribué sur le bief ;
- si $\theta = 0$ on retrouve un comportement du type réservoir linéaire avec une réponse instantanée.

En théorie, l'onde cinématique ne comporte pas de diffusion. En pratique, une onde physique réelle présente toujours une certaine diffusion. Aussi est-il intéressant de choisir judicieusement la valeur de θ de telle sorte que la diffusion numérique D_n du schéma de résolution soit aussi proche que possible de la diffusion physique réelle D .

D'après Cunge (1969), en partant de l'Eq. 98, il convient de poser

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{D}{C\Delta x} \quad \text{Eq. 99}$$

Il faut vérifier toutefois que θ vérifie bien la relation d'inégalité de l'Eq. 97. Si on fait l'hypothèse que C est une constante (hypothèse courante), alors C_1 , C_2 et C_3 sont aussi des constantes et on choisit donc aussi la valeur de θ constante. Dans le cas contraire, on détermine une valeur de C « instantanée » en fonction de I_1 , I_2 , Q_1 et Q_2 , avec le débit Q la valeur donnée par la relation

$$Q = \frac{I_1 + I_2 + Q_1 + Q_2}{4} \quad \text{Eq. 100}$$

Or la valeur de Q_2 est a priori inconnue puisque c'est celle que l'on cherche à calculer. On détermine donc Q_2 soit par un calcul itératif, soit de manière approchée à partir des trois valeurs de I_1 , I_2 et Q_1 .

Il est également possible de déterminer θ par la relation

$$\theta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q}{BIC\Delta x} \right) \quad \text{Eq. 101}$$

5.2 SCHEMA ADIMENSIONNEL DE PONCE ET THEURER (1982)

Ce schéma repose sur les mêmes principes que le précédent, mais il fait intervenir deux nombres adimensionnels dans les calculs :

– le nombre de Courant Co :

$$Co = \frac{C\Delta t}{\Delta x} \quad \text{Eq. 102}$$

– le nombre de Reynolds local Cr :

$$Cr = \frac{2D}{C\Delta x} = \frac{Q}{BIC\Delta x} \quad \text{Eq. 103}$$

Après calculs et en choisissant θ de telle sorte que D_n soit égale à D , on obtient :

$$\theta = \frac{1}{2}(1 - Cr) \quad \text{Eq. 104}$$

D'où on déduit ensuite

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1 - Cr + Co}{1 + Cr + Co} \\ C_2 = \frac{-1 + Cr + Co}{1 + Cr + Co} \\ C_3 = \frac{1 + Cr - Co}{1 + Cr + Co} \\ C_1 + C_2 + C_3 = 1 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 105}$$

Le principal intérêt de cette approche réside dans le fait que les conditions que doivent vérifier Δx et Δt sont exprimées facilement au moyen de Co et Cr (Ponce et Theurer, 1982).

5.3 SCHEMA PSEUDO-ANALYTIQUE DE KOUSSIS (1976)

Ce schéma de résolution est une variante du schéma classique initial, dans lequel seules les dérivées partielles par rapport à l'espace sont discrétisées, les dérivées par rapport au temps étant conservées sous la forme continue et résolues de manière analytique, d'où le terme de solution pseudo-analytique.

On adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned} I_c(t) &= Q(i\Delta x, t) \\ Q_c(t) &= Q((i+1)\Delta x, t) \end{aligned}$$

En adoptant la même approche que pour le schéma classique, on obtient l'opérateur suivant :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \theta \frac{dI_c}{dt} + (1-\theta) \frac{dQ_c}{dt} \quad \text{Eq. 106}$$

En reportant dans l'équation de l'onde cinématique

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{Eq. 25}$$

il vient

$$\begin{aligned} \theta \frac{dI_c}{dt} + (1-\theta) \frac{dQ_c}{dt} + C \frac{Q_c - I_c}{\Delta x} &= 0 \\ \frac{dQ_c}{dt} + C \frac{Q_c}{(1-\theta)\Delta x} &= C \frac{I_c}{(1-\theta)\Delta x} - \frac{\theta}{1-\theta} \frac{dI_c}{dt} \end{aligned} \quad \text{Eq. 107}$$

Si on discrétise en prenant

$$\frac{dQ_c}{dt} = \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{dI_c}{dt} = \frac{I_2 - I_1}{\Delta t}$$

on retrouve une solution entièrement numérique :

$$Q_2 = C_1 I_1 + C_2 I_2 + C_3 I_3 \quad \text{Eq. 94}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{\theta \Delta x + C \Delta t}{(1-\theta)\Delta x + C \Delta t} \\ C_2 = \frac{-\theta \Delta x + C \Delta t}{(1-\theta)\Delta x + C \Delta t} \\ C_3 = \frac{(1-\theta)\Delta x - C \Delta t}{(1-\theta)\Delta x + C \Delta t} \\ C_1 + C_2 + C_3 = 1 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 108}$$

Mais l'Eq. 107 peut aussi être résolue comme une équation différentielle ordinaire, avec calcul d'une intégrale numérique, ce qui conduit à une solution théoriquement plus précise (Weinmann et Laurensen, 1979). Dans ce cas, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{\Delta x}{C \Delta t} (1 - C_3) - C_3 \\ C_2 = 1 - \frac{\Delta x}{C \Delta t} (1 - C_3) \\ C_3 = \exp\left(-\frac{C \Delta t}{(1-\theta)\Delta x}\right) \\ C_1 + C_2 + C_3 = 1 \end{array} \right. \quad \text{Eq. 109}$$

Il y a toujours une diffusion numérique D_n . Si on veut qu'elle soit égale à la diffusion physique réelle D , il faut calculer θ par la relation

$$\theta = 1 - \frac{Co}{\text{Ln}\left(\frac{1+Co+Cr}{1-Co+Cr}\right)} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq 0.5 \quad \text{Eq. 110}$$

avec Co le nombre de Courant et Cr le nombre de Reynolds local tels que définis au paragraphe 5.2.

De nombreuses autres méthodes de résolution de l'Eq. 107 ont été proposées, mais souvent au détriment de la correspondance entre la diffusion numérique et la diffusion physique. Cet aspect est en effet particulièrement intéressant : il permet de travailler avec l'équation simple de l'onde cinématique et d'obtenir, par un choix judicieux des paramètres, des résultats équivalents à ceux obtenus avec l'équation plus complexe de l'onde diffusante.

5.4 CONDITIONS SUR Δx

Pour les cas où $\theta \neq 0$, il se produit des débits négatifs en sortie de bief au début de la crue. Ceci est dû aux schémas de résolution numérique utilisés. En pratique, et de manière empirique, ces valeurs négatives sont suffisamment petites et se produisent sur une durée suffisamment courte pour être négligeables si on choisit Δx tel que

$$\frac{\Delta x}{C} \leq \frac{T_r}{20} \quad \text{Eq. 111}$$

avec T_r le temps de montée de la crue à l'entrée du bief. Cette valeur constitue la limite supérieure pour Δx lorsque $\theta \neq 0$.

Laurenson (Weinmann et Laurenson, 1979) a montré que L_b devait être divisée en N pas Δx , et on observe que θ diminue avec Δx . Comme θ , normalement, ne peut pas avoir une valeur négative, on fixe ainsi, expérimentalement, une limite inférieure à Δx .

5.5 CONDITIONS SUR Δt

La limite supérieure théorique de Δt est donnée par la condition

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{\Delta x}{C} \quad \text{Eq. 112}$$

En pratique, on observe que Δt peut être largement supérieur à cette valeur sans que des problèmes de stabilité des calculs aient été observés (Weinmann et Laurenson, 1979).

Si on prend $\Delta t \ll \Delta x/C$, cela implique que les variables sur un pas d'espace donné sont calculées avant que la perturbation (c'est à dire l'onde de crue) venant du pas d'espace précédent n'ait eu le temps de parcourir la distance Δx . Lorsque $\theta \neq 0$, cela peut conduire à des résultats aberrants tels que des débits négatifs ou en variation brutale. Il est donc recommandé de prendre Δt conforme à l'Eq. 112.

6. LES MODELES CONCEPTUELS

Face à la lourdeur et à la complexité des modèles mécanistes dérivés de l'hydrodynamique, de nombreux auteurs ont développé des modèles plus simples généralement dérivés de ou rattachés à la dynamique des systèmes et adaptés aux phénomènes concernant l'hydrologie urbaine. Dans ce type de modèles, il ne s'agit plus de décrire le détail des phénomènes physiques en jeu, mais la transformation d'un hydrogramme d'entrée par un système, en l'occurrence un tronçon de collecteur, en un hydrogramme de sortie (Figure 6.1).

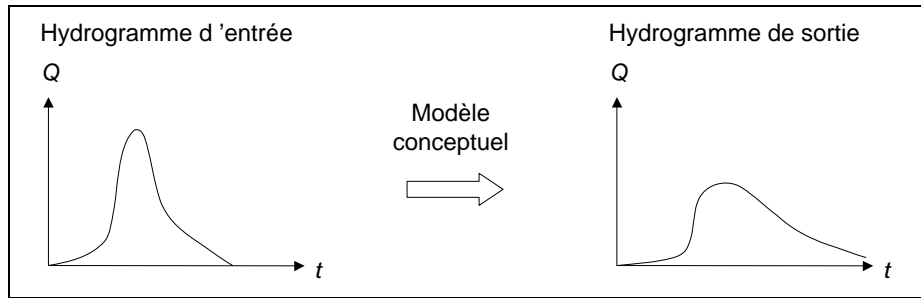


Figure 6.1 : Principe de fonctionnement d'un modèle conceptuel

Nous décrivons ici les modèles les plus courants, ce type de modèles ayant fait l'objet d'une littérature abondante depuis les années 1970.

6.1 METHODE DU TIME-OFFSET

Cette méthode repose sur l'hypothèse suivante : l'hydrogramme se propage sans déformation à travers le bief ou le collecteur. Il s'agit donc d'un simple décalage temporel. Si cette approximation est relativement grossière, elle a l'avantage de permettre des simulations de réseaux d'assainissement extrêmement rapides et est utilisée dans certains logiciels de prédimensionnement de réseaux ou de techniques alternatives.

Un hydrogramme entrant à l'instant t au point d'abscisse x se retrouve à l'identique au point d'abscisse $x+\Delta x$ à l'instant $t+T_o$, avec T_o le décalage temporel appelé en anglais time-offset.

Cette méthode conduit à surestimer les débits de pointe en sortie de réseau car l'effet de laminage est totalement ignoré.

Le paramètre T_o est le seul paramètre de ce modèle et il existe plusieurs techniques pour déterminer sa valeur :

- en procédant par ajustement expérimental ;
- en divisant le pas d'espace Δx par une vitesse d'écoulement moyenne qui peut être, par exemple :
 - la vitesse correspondant au débit maximum ;
 - la vitesse correspondant à la moyenne interquartile des débits ;
 - la vitesse moyenne pondérée des différentes vitesses d'écoulement observées.

Les vitesses d'écoulement sont généralement calculées en faisant l'hypothèse que le régime est permanent et en appliquant la formule de Manning-Strickler. L'hydrogramme est discrétisé au pas de temps Δt . Sur chaque pas de temps $n\Delta t$, on calcule la vitesse d'écoulement U^n et le débit Q^n . La vitesse moyenne pondérée \bar{U} s'écrit :

$$\bar{U} = \frac{\sum U^n Q^n}{\sum Q^n} \quad \text{Eq. 113}$$

Des difficultés numériques peuvent se présenter lorsque T_o n'est pas un multiple entier de Δt . On pourra se référer à Breuil (1987) qui a étudié cette question pour le modèle TERESA (voir translation simple).

Le modèle QUURM (Watt et Kidd, 1975) propose une variante où seul le débit moyen sur la moitié centrale de l'hydrogramme est pris en compte pour déterminer T_O .

6.2 MODELE MUSKINGUM INITIAL

On retrouve ici des modèles présentés pour représenter la transformation pluie-débit et le ruissellement. Il s'agit de modèles issus du modèle de type réservoir créé initialement par Mc Carthy en 1934 pour simuler les débits de la rivière Muskingum dans l'Ohio, USA (Mc Carthy, 1940).

Depuis les travaux de Hicks (1943) qui ont confirmé ce qui n'était au départ qu'une hypothèse de travail, on sait que le volume stocké dans un tronçon est sensiblement proportionnel au débit dans ce tronçon (voir Figure 6.2). Il s'agit précisément de l'hypothèse faite dans le modèle Muskingum dont la loi de stockage s'écrit, sous sa forme la plus générale :

$$V_s = K(\alpha Q_e(t) + (1 - \alpha)Q_s(t)) \quad \text{Eq. 114}$$

avec

- V_s le volume stocké (m^3)
- Q_e le débit entrant (m^3/s)
- Q_s le débit sortant (m^3/s)
- K paramètre du modèle Muskingum (s)
- α paramètre de pondération (-)

Cette première équation est complétée par l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \quad \text{Eq. 115}$$

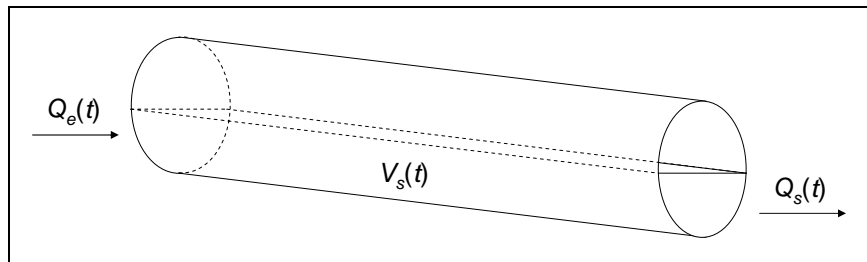


Figure 6.2 : Principe du modèle Muskingum

Le paramètre K (appelé lag-time) représente le décalage temporel entre les barycentres des hydrogrammes d'entrée et de sortie (Figure 6.3) : c'est aussi, théoriquement, le temps de transit d'une onde se propageant à la célérité C sur une distance Δx :

$$K = \frac{\Delta x}{C} \quad \text{Eq. 116}$$

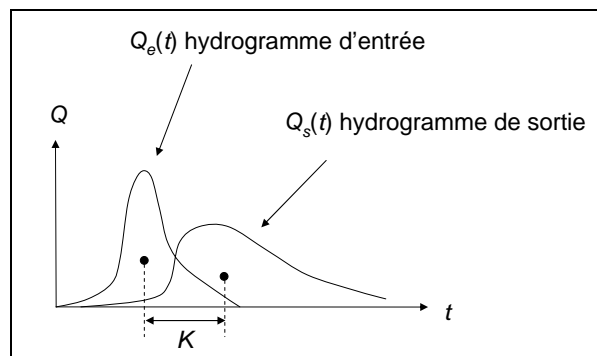


Figure 6.3 : Signification physique du paramètre K du modèle Muskingum

De nombreux auteurs (par exemple Reynier 1978 ; Kovacs 1988 ; Semsar 1995) proposent de calculer une valeur approchée de la célérité C par une fonction de la vitesse U de l'eau en régime uniforme, ce qui correspond à une valeur proche du débit maximum Q_{max} . Semsar (1995) a montré que la relation suivante donnait de très bons résultats, avec la vitesse U calculée pour 80 % du débit maximum :

$$K = \frac{\Delta x}{0.8 U_{0.8 Q_{max}}} \quad \text{Eq. 117}$$

Le paramètre de pondération α quantifie les influences respectives des débits d'entrée et de sortie sur le volume stocké. D'un point de vue physique, on a bien évidemment $\alpha \in [0,1]$. Néanmoins, certains auteurs proposent de prendre, pour des raisons numériques, $\alpha \in [-0.5, 0.5]$, ou même $\alpha \in [-\infty, 0.5]$ (Strupczewski et Kundzewicz, 1980). Le cas $\alpha < 0$ n'a plus de signification physique mais il permet parfois de mieux représenter certains hydrogrammes particuliers.

En pratique, la plupart des valeurs utilisées restent comprises entre 0 et 0.5. Reynier (1978) préconise $\alpha = 0.2$, ce qui semble une valeur moyenne raisonnable.

On peut montrer que si on prend $\alpha = \theta$ (θ étant le coefficient d'implication dans les schémas de résolution de l'onde cinématique), le paramètre du modèle Muskingum peut être assimilé à la diffusion hydraulique réelle D dans l'équation de l'onde diffusante (Preissman 1971, Cunge 1969, Kovacs, 1988). On peut donc considérer, dans ces conditions, le modèle Muskingum comme une approximation à l'ordre 2 de l'onde diffusante.

Le paramètre α est calculable par les relations suivantes :

– relation proposée par Cunge (1969) :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q}{BIC \Delta x} \right) = \frac{1}{2} (1 - Cr) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 0.5 \quad \text{Eq. 118}$$

– relation proposée par Koussis (1978) :

$$\alpha = 1 - \frac{Co}{\text{Ln} \left(\frac{1 + Co + Cr}{1 - Co + Cr} \right)} \quad \text{Eq. 119}$$

Si $\alpha = 0$, on retrouve le modèle du réservoir linéaire simple.

Le système composé des deux équations de stockage et de conservation se résout soit par intégration directe, soit par discrétisation. Cette deuxième technique est la plus rapide à mettre en œuvre. On dérive la loi de stockage par rapport au temps t , et on égalise avec les termes de droite de l'équation de conservation :

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = K\alpha \frac{dQ_e(t)}{dt} + K(1-\alpha) \frac{dQ_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

On discrétise directement cette équation différentielle. Pour cela, il existe plusieurs possibilités selon les opérateurs algébriques retenus. Dans tous les cas, on obtient une relation du type :

$$Q_s(t + \Delta t) = C_1 Q_e(t) + C_2 Q_e(t + \Delta t) + C_3 Q_s(t) \quad \text{Eq. 120}$$

avec $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

Les principaux schémas courants de discrétisation et les coefficients C_1 , C_2 et C_3 correspondants sont données dans le Tableau 6.1.

Intégration numérique du modèle Muskingum		
$C_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} \exp\left(-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}\right)$	$C_2 = 1 - \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}\right)$	$C_3 = \exp\left(-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}\right)$
discrétisation n° 1 :		
$f(t + \Delta t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(t + \Delta t))$ et $\frac{df}{dt} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$		
$C_1 = \frac{2K\alpha + \Delta t}{2K(1-\alpha) + \Delta t}$	$C_2 = \frac{-2K\alpha + \Delta t}{2K(1-\alpha) + \Delta t}$	$C_3 = \frac{2K(1-\alpha) - \Delta t}{2K(1-\alpha) + \Delta t}$
discrétisation n° 2 :		
$f(t + \Delta t) = f(t)$ et $\frac{df}{dt} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$		
$C_1 = \frac{K\alpha}{K(1-\alpha) + \Delta t}$	$C_2 = \frac{-K\alpha + \Delta t}{K(1-\alpha) + \Delta t}$	$C_3 = \frac{K(1-\alpha)}{K(1-\alpha) + \Delta t}$
Modèle de Koussis (1976)		
$C_1 = \frac{K}{\Delta t}(1 - C_3) - C_3$	$C_2 = 1 - \frac{K}{\Delta t}(1 - C_3)$	$C_3 = \exp\left(-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}\right)$
Modèle de Cunge – Cayla (1980)		
$C_1 = \frac{2\alpha + 1}{3 - 2\alpha}$	$C_2 = \frac{1 - 2\alpha}{3 - 2\alpha}$	$C_3 = \frac{1 - 2\alpha}{3 - 2\alpha}$

Tableau 6.1 : Schémas de discrétisation et coefficients C_j du modèle Muskingum

Ces différents modèles ont fait l'objet de très nombreuses études et comparaisons. Perumal (1989) a montré l'identité formelle des coefficients C_j des modèles discrétisés avec ceux du modèle de Koussis (1980) pour l'onde diffusante. Il a également mis en évidence les conditions nécessaires pour obtenir des résultats identiques avec les deux modèles. Des analyses semblables ont également été conduites par Kovacs (1988).

Utilisé avec prudence, notamment au niveau du pilotage de la diffusion numérique, le modèle de Muskingum donne généralement des résultats satisfaisants pour la simulation des réseaux d'assainissement lorsque les singularités hydrauliques et les influences aval sont minimales.

Afin d'améliorer les résultats obtenus en conduite circulaire (car le modèle initial de Muskingum a été développé et validé pour des chenaux prismatiques), Vazquez *et al.* (1999) ont proposé une variante dans laquelle on pose :

$$K = \frac{\Delta x}{U_{\max}} \quad \text{Eq. 121}$$

et

$$N = \frac{L_b}{\Delta x} \quad \text{Eq. 122}$$

d'où :

$$K = \frac{L_b}{NU_{\max}} \quad \text{Eq. 123}$$

Le calage, effectué au moyen d'un réseau de neurones, porte sur les grandeurs N et α . N est fixé entre 1 et 30, et α est libre de varier entre 0 et 1. Les résultats obtenus montrent une bonne reproduction des hydrogrammes théoriques de référence calculés au moyen des équations de Barré de Saint-Venant, ainsi qu'un bon calage pour un hydrogramme réel mesuré en réseau d'assainissement.

6.3 MODELES DERIVES NON LINEAIRES

Plusieurs variantes du modèle Muskingum ont été proposées par divers auteurs, notamment des modèles non linéaires comprenant des paramètres supplémentaires pour mieux reproduire certains hydrogrammes sur des sections de mesures où les relations $Q = f(h)$ présentent des non linéarités importantes. Parmi ceux-ci, les plus connus sont les suivants (Gill, 1978) :

$$V_s(t) = K \left(\alpha Q_e(t)^m + (1 - \alpha) Q_s(t)^m \right) \quad \text{Eq. 124}$$

$$V_s(t) = K \left(\alpha Q_e(t) + (1 - \alpha) Q_s(t) \right)^m \quad \text{Eq. 125}$$

Ces deux modèles ont été comparés au modèle initial linéaire (Singh et Scarlatos, 1987). Parmi les principales conclusions, on note que :

- les résultats ne sont pas toujours plus précis qu'avec le modèle classique ;
- l'Eq. 124 semble fournir des résultats plus précis que l'Eq. 125 ;
- la qualité des résultats dépend davantage du paramètre K que du paramètre α ;
- le paramètre K n'est plus constant et il faut prendre $K = K(t)$ pour mieux reproduire la non linéarité de la relation stockage-débit.

Cela conduit à revoir l'hypothèse initiale du modèle Muskingum consistant à supposer que la vitesse d'écoulement en entrée est égale à la vitesse d'écoulement en sortie et qu'elle ne varie pas au cours du temps. Si on suppose que la vitesse d'écoulement est variable et liée au débit, on introduit une nouvelle famille de modèles non linéaires dans lesquels on utilise des relations du type $K = K(t)$ ou $K = K(Q)$.

Dans le premier cas, l'équation de stockage devient

$$V_s = K(t) \left(\alpha Q_e(t) + (1 - \alpha) Q_s(t) \right) \quad \text{Eq. 126}$$

Si on prend $\alpha = 0$, on obtient la relation simple suivante :

$$V_s = K(t) Q_s(t) \quad \text{Eq. 127}$$

Expérimentalement (Brod et Mogis, 1980), la fonction $K(t)$ est déterminée à partir de $Q_s(t)$ selon une relation du type

$$K(t) = \xi Q_s(t)^\beta \quad \text{Eq. 128}$$

avec ξ et β coefficients numériques.

Dans ces conditions, on retrouve un modèle proche de ceux fournis pour l'hydraulique des écoulements permanents qui s'expriment généralement sous la forme

$$Q_s(t) = \zeta V_s(t)^{\frac{1}{\beta+1}} \quad \text{Eq. 129}$$

avec ζ et β coefficients numériques, ce qui conduit à obtenir une formulation finale du type

$$Q_s(t) = f \left(h(t)^\delta \right) \quad \text{Eq. 130}$$

avec δ coefficient numérique.

Chocat (1978) a développé un autre modèle non linéaire à partir de la discrétisation suivante de l'équation de continuité :

$$\frac{V_s(t) - V_s(t - \Delta t)}{\Delta t} = \beta Q_e(t) + (1 - \beta) Q_e(t - \Delta t) - \beta Q_s(t) - (1 - \beta) Q_s(t - \Delta t) \quad \text{Eq. 131}$$

avec $\beta \in [0,1]$.

La solution la plus simple consiste à choisir $\beta = 1$. Cette discrétisation n'est pas très précise, mais l'approximation peut être considérée comme satisfaisante moyennant un choix judicieux du pas de temps Δt . On obtient alors

$$\frac{V_s(t) - V_s(t - \Delta t)}{\Delta t} = Q_e(t) - Q_s(t - \Delta t) \quad \text{Eq. 132}$$

soit

$$Q_s(t) = Q_e(t) + \frac{V_s(t - \Delta t)}{\Delta t} - \frac{V_s(t)}{\Delta t} \quad \text{Eq. 133}$$

En prenant $\alpha = 1$ dans le modèle général de Muskingum, le volume stocké V_s s'exprime comme suit :

$$V_s(t) = K(t)Q_e(t) \quad \text{Eq. 134}$$

Cette relation n'a aucune signification physique en dehors du cas où l'écoulement est sous contrôle amont (écoulement supercritique). Dans ces conditions, on obtient finalement

$$Q_s(t) = Q_e(t) \left(\frac{\Delta t - K(t)}{\Delta t} \right) + Q_e(t - \Delta t) \frac{K(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad \text{Eq. 135}$$

$K(t)$ étant égal à $\Delta x / U(t)$, cette fonction est déterminée en supposant que le mouvement est constitué d'une succession d'écoulements uniformes. Au moyen de l'équation de Chézy

$$U = C_h \sqrt{R_h I} \quad \text{Eq. 136}$$

et de la relation $Q = SU$, on détermine $U(t)$ à partir de $Q(t)$, et on en déduit la valeur de $K(t)$.

7. MODELISATION DES ECOULEMENTS EN CHARGE

7.1 PROBLEMES LIES A LA MODELISATION DES MISES EN CHARGE

Un écoulement en canalisation est en charge lorsque le débit transité est supérieur au débit maximum que peut écouler cette canalisation à surface libre. En prenant l'exemple d'une canalisation circulaire le débit maximum à surface libre est obtenu pour un tirant d'eau voisin de 95 % du diamètre. Cette valeur de débit dépasse de 5 % le débit obtenu pour une section pleine et non en charge. On a une courbe $Q = f(h)$ qui a l'allure représentée Figure 7.1.

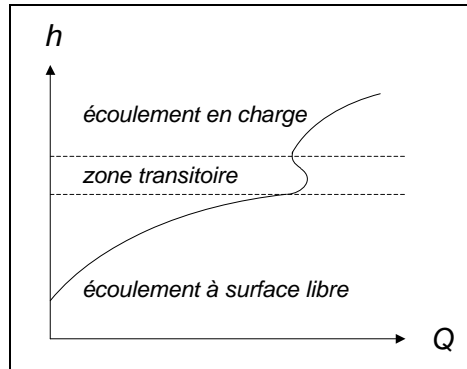


Figure 7.1 : Passage d'un écoulement à surface libre à un écoulement en charge dans une conduite circulaire

A partir de la zone transitoire, h représente la charge nécessaire pour que le débit s'écoule. A surface libre cette grandeur mesure la hauteur d'eau réelle, en charge elle est supérieure à la hauteur maximale de la canalisation.

Seule l'approche mécaniste permet de représenter correctement les mises en charge dans un réseau d'assainissement, mais la résolution complète est lourde et complexe à mettre en œuvre dans de bonnes conditions (Barré de Saint-Venant avec schéma implicite). A l'inverse, l'approche globale est beaucoup plus simple mais les méthodes employées ne sont pas adaptées au cas des mises en charge partielle ou complète des collecteurs.

Or les mises en charge constituent un problème important lorsqu'on veut connaître en détail le fonctionnement d'un réseau, notamment ses points faibles que sont les lieux de débordement. La principale difficulté vient du fait que les mises en charge peuvent être partielles ou complètes sur un tronçon, temporaires ou de longues durées, stationnaires ou mobiles le long du réseau. Elles ont également une influence directe sur l'écoulement situé à l'amont. Ces différents points empêchent l'utilisation des modèles classiques de représentation des écoulements en permanence en charge tels que ceux mis en œuvre pour simuler le fonctionnement des réseaux d'eau potable par exemple.

En pratique, le problème principal consiste à représenter la transition entre écoulement à surface libre et écoulement en charge et l'influence de cette mise en charge sur l'écoulement amont.

Face à cette complexité, et comme il n'existe pas de méthode satisfaisante, la plupart des méthodes existantes reposent sur des artifices de calcul ou de représentation des phénomènes.

7.2 METHODE DU STOCKAGE

Le volume d'eau qui s'écoule en charge est « stocké » jusqu'à ce que l'écoulement puisse se faire à surface libre. Ce volume stocké est alors évacué vers l'aval aux pas de temps suivants par un modèle d'écoulement à surface libre (Breuil, 1987), sans jamais dépasser la capacité maximale du collecteur à surface libre. Avec cette méthode, on ne tient évidemment pas compte de la réalité du phénomène de mise en charge ni de ses conséquences sur l'amont.

7.3 METHODE DE LA TRANSLATION SIMPLE

Cette méthode consiste à reporter simplement le volume en charge directement à l'aval du tronçon selon la méthode du time-offset (Breuil, 1987 ; Hey-Ehrmann, 1989). Il n'y a ni stockage ni influence sur l'écoulement amont. Cet artifice de calcul accélère le transfert du débit, contrairement à la méthode précédente qui le ralentit. La réalité du phénomène se situe en fait entre stockage et translation.

7.4 METHODE DE LA FENTE DE PREISSMANN

Cette méthode permet de représenter les mises en charge tout en conservant un modèle d'écoulement à surface libre. L'artifice utilisé, proposé par Preissmann, consiste à considérer la conduite ouverte le long de sa génératrice supérieure et reliée à l'atmosphère par une section rectangulaire de faible épaisseur, comme indiqué Figure 7.2.

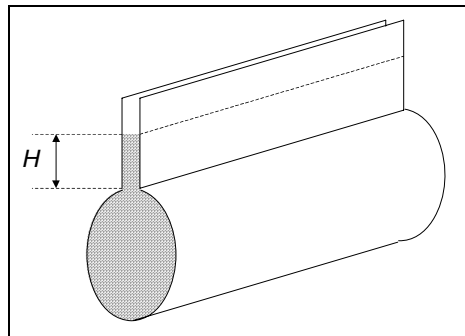


Figure 7.2 : Fente de Preissmann pour la modélisation des écoulements en charge

On utilise un modèle classique d'écoulement à surface libre, la hauteur H représentant fictivement une hauteur de mise en charge. Cela permet de définir l'emplacement d'une zone de mise en charge et d'estimer la hauteur de la charge. Cet artifice a été utilisé par Sogreah avec le modèle de Barré de Saint-Venant. Son principal intérêt réside dans la facilité d'emploi et dans le fait qu'un seul modèle est nécessaire. Par contre, cette méthode ne permet pas de prendre en compte l'influence de la mise en charge sur l'écoulement amont. C'est pourquoi d'autres approches ont été proposées.

7.5 METHODE INSA

Cette méthode a été initialement proposée par Chocat (1978, 1981). Elle est fondée sur l'utilisation d'un modèle d'écoulement en charge et d'un modèle délimitant l'influence de la charge sur la zone située en amont. Ce modèle est établi sur l'hypothèse suivante : à chaque pas de temps, les conditions d'écoulement sont celles d'un écoulement permanent. On raisonne donc pas de temps par pas de temps. Comme la mise en charge influence l'amont, sur un pas de temps, on recherche la configuration qui assure l'équilibre d'un écoulement supposé permanent. Cette recherche de l'équilibre permet de délimiter la zone influencée par la mise en charge et la valeur du débit dans cette zone partiellement en charge, en utilisant un modèle d'écoulement à surface libre étendu à l'écoulement en charge.

La mesure de l'équilibre résulte de la juxtaposition d'un modèle de propagation qui doit se faire nécessairement de l'amont vers l'aval, et d'un modèle de mesure de charge qui ne peut se faire que de l'aval vers l'amont. Le modèle de mesure des charges est du type (Figure 7.3) :

$$H_{ri} = f(H_{rj}, Cc, \Delta H_{ij}) \quad \text{Eq. 137}$$

avec

H_{ri} et H_{rj} les hauteurs d'eau dans les regards i et j

Cc caractéristiques des conduites

ΔH_{ij} perte de charge entre les regards i et j .

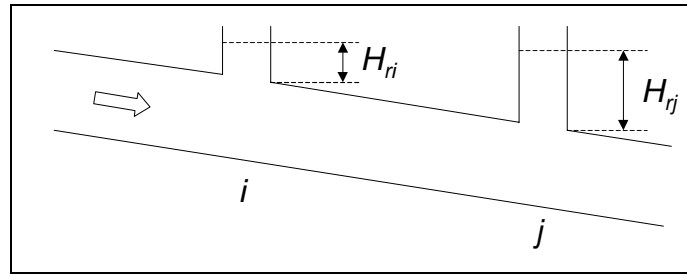


Figure 7.3 : Représentation des mises en charge dans le modèle INSA

Ce modèle est établi pour les diverses configurations que l'on peut rencontrer, les équations étant issues de l'équation fondamentale de Bernoulli

$$H = \frac{U^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \quad \text{Eq. 138}$$

avec

z altitude ou cote (m)

U vitesse d'écoulement (m/s)

P pression (m)

ρ masse volumique (kg/m³)

g accélération de la pesanteur (m/s²).

Le modèle de propagation est du type Muskingum non linéaire

$$Q_s(t) = Q_e(t) + \frac{V_s(t - \Delta t)}{\Delta t} - \frac{V_s(t)}{\Delta t} \quad \text{Eq. 133}$$

avec la relation supplémentaire

$$V_s(t) = Q_e(t) \cdot T_P \quad \text{Eq. 139}$$

avec T_P le temps de parcours (s).

Le temps de parcours T_P est mesuré en fonction du débit entrant et de manières différentes selon que l'écoulement dans le tronçon considéré est totalement ou partiellement en charge ou à surface libre, comme indiqué Figure 7.4.

La conduite est entièrement à surface libre :

$$V_s(t) = L_b S_a \quad \text{Eq. 140}$$

La conduite est entièrement en charge :

$$V_s(t) = L_b S_c \quad \text{Eq. 141}$$

La conduite est partiellement en charge :

$$V_s(t) = L_1 S_a + \frac{1}{2} L_2 (S_a + S_c) + L_3 S_c \quad \text{Eq. 142}$$

avec $L_b = L_1 + L_2 + L_3$.

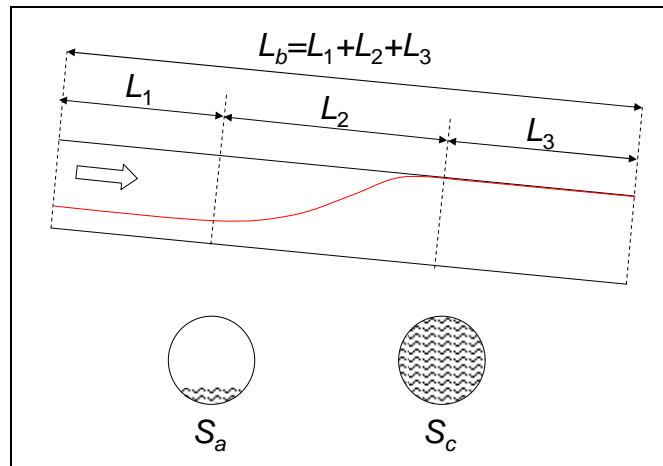


Figure 7.4 : Calcul du volume stocké selon les conditions de l'écoulement dans le modèle INSA

Le calcul de la charge à partir du débit se fait en étendant la formule de Chézy aux écoulements en charge par utilisation de la formule de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{f_c}} = -2 \log \left(\frac{k_r}{3.7 D_h} + \frac{2.51 \nu}{U D_h \sqrt{f_c}} \right) \quad \text{Eq. 143}$$

avec

- f_c coefficient de pertes de charge
- k_r rugosité (m)
- ν viscosité cinématique (m²/s)
- D_h diamètre hydraulique (m)
- U vitesse moyenne de l'écoulement (m/s).

Si l'écoulement est turbulent rugueux, le deuxième terme du logarithme est négligeable.

Muni de l'ensemble de ces équations, la recherche de l'équilibre est effectuée de la manière suivante :

- a) on trouve un débit Q_s qui met en charge le tronçon ;
- b) le calcul de la charge permet de déterminer les charges dans les tronçons amont et de définir la zone influencée par la mise en charge ;
- c) connaissant les tronçons en charge partielle ou totale, on calcule à nouveau le débit Q_s dans le tronçon j en utilisant le modèle de propagation tenant compte des mises en charge. Il suffit ensuite de reprendre l'étape précédente jusqu'à ce qu'il y ait équilibre, c'est à dire que le débit de sortie Q_s au tronçon j ne varie plus.

On peut montrer que le processus est convergent (Chocat, 1978). Le calcul itératif est conduit sur un pas de temps. Si le tronçon aval est en charge, on recommence toute la procédure. Il en résulte de nombreuses itérations en boucle, et donc un ralentissement parfois significatif des calculs. Mais cette méthode permet une prise en compte explicite des phénomènes de mise en charge, même si elle est fondée sur des simplifications théoriques importantes.

8. TABLEAU RECAPITULATIF

Le Tableau 8.1 récapitule les principales approches possibles pour modéliser les écoulements en réseau d'assainissement et les phénomènes que ces modèles sont susceptibles de prendre en compte (d'après Chevereau 1980).

	amortissement par frottement	inertie	influence aval	mise en charge	maillage du réseau	translation pure
time-offset						×
Muskingum	×					
onde cinématique	×					
onde diffusante	×		×			
St Venant schéma explicite	×	×	×		×	
St Venant schéma implicite	×	×	×	×	×	

Tableau 8.1 : Tableau récapitulatif des modèles et de leurs possibilités

Au-delà de ce tableau, dans le cas d'un usage opérationnel, le choix du modèle d'écoulement est une question délicate. Dans de nombreux cas, les débits simulés à l'exutoire d'un bassin versant peuvent être assez semblables, qu'ils soient calculés avec les équations de Barré de Saint-Venant ou avec les modèles de type Muskingum. Afin d'aider l'utilisateur à faire un choix pertinent (choix du modèle et des valeurs des paramètres) en fonction des objectifs visés, de la structure du réseau et des caractéristiques des événements pluvieux, Blanpain et Chocat (1999) ont proposé un système d'aide au choix mettant en œuvre des règles expertes et utilisant la théorie des sous-ensembles flous pour tenir compte de l'imprécision des modèles et des incertitudes des données.

Par ailleurs, lorsque l'on s'intéresse au débit Q à l'exutoire d'un bassin versant, des niveaux de description très différents du réseau de collecteurs peuvent conduire à des résultats très semblables (Chocat et Cabane 1999). Il est donc possible, dans certains cas, de simplifier la représentation du réseau sans dégrader notablement l'information calculée à son exutoire. Des recherches plus approfondies sur cette question mériteraient d'être menées en travaillant notamment sur la représentation de la complexité.

9. BIBLIOGRAPHIE

(Valeur du champ « CODE » dans BIBLIO-3.DB : d5)

- Blanpain O., Chocat B. (1999). Un système d'aide au choix de modèles hydrologiques et hydrauliques pour simuler les réseaux d'assainissement : application aux modèles de propagation en conduite. *Revue des Sciences de l'Eau*, 12(2), 317-332.
- Breuil B. (1987). TERESA, notice d'analyse. Paris (France) : Service Technique de l'Urbanisme, 77 p.
- Brod P., Mogis D. (1980). Essai de validation expérimentale de modèles d'écoulement en canalisation. Villeurbanne (France) : INSA de Lyon, Département GCU, Rapport de Projet de Fin d'Etudes
- Carlier M. (1986). *Hydraulique générale et appliquée*. Paris (France) : Eyrolles, 570 p. ISSN 0399-4198.
- Chevereau G. (1980). Eléments d'évaluation des modèles mathématiques de simulation des écoulements non permanents dans les réseaux d'assainissement urbain. *TSM*, 3, 143-145.
- Chocat B. (1978). Un modèle de simulation des écoulements dans les réseaux d'assainissement pluvial. Thèse de docteur-ingénieur : INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 304 p.
- Chocat B. (1981). Un système d'aide à la gestion, la prévision et la conception des équipements d'assainissement. Thèse d'état : INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 322 p.
- Chocat B., Cabane P. (1999). Hydrologie urbaine : modélisation et effet d'échelle. *La Houille Blanche*, 7/8, 106-111.
- Chocat B., Thibault S., Seguin D. (1982). *Hydrologie urbaine et assainissement - Tome 1 : hydrologie urbaine*. Lyon (France) : INSA, Cours polycopié, 142 p.
- Chow V.T. (1973). *Open-channel hydraulics*. Singapore : McGraw-Hill Book Company, 680 p. ISBN 0-07-085906-X.
- Cooley R.L., Moin S.A. (1976). Finite element solution of Saint-Venant equations. *Journal of the Hydraulics Division*, 102(6), 759-775.
- Crossley A.J. (1999). Accurate and efficient numerical solutions for the Saint-Venant equations of open channel flow. PhD thesis: University of Nottingham, UK, October 1999, 243 p.
- Cunge J.A. (1969). Au sujet d'une méthode de propagation des crues (méthode Muskingum). *Journal of Hydraulic Research*, 7(2), 205-230.
- Daubert A., Marvaud P., Fabre L., Margnac A. (1967). Quelques applications de modèles mathématiques à l'étude des écoulements non permanents dans un réseau ramifié de rivières ou de canaux. *La Houille Blanche*, 7, 735-746.
- Euvarard D. (1988). Résolution numérique des équations aux dérivées partielles - Différences finies, éléments finis. Paris (France) : Masson, 288 p. ISBN 2-225-81288-8.
- Gill M.A. (1978). Flood routing by the Muskingum method. *Journal of Hydrology*, 36, 353-363.
- Graf W.H., Altinakar M.S. (1993). *Hydraulique fluviale. Tome 1 : écoulement permanent uniforme et non uniforme*. Lausanne (Suisse) : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 16, 260 p. ISBN 2-88074-261-7.
- Graf W.H., Altinakar M.S. (1996). *Hydraulique fluviale - Tome 2 : écoulement non permanent et phénomènes de transport*. Lausanne (Suisse) : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 380 p. ISBN 2-88074-300-1.
- Graf W.H., Altinakar M.S. (2000). *Hydraulique fluviale - Ecoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*. Lausanne (Suisse) : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 628 p. ISBN 2-88074-442-3.
- Henderson F.M. (1966). *Open-channel flow*. New York (USA) : McMillan Publishing Company Inc, 522 p. ISBN 0-02-353510-5.
- Hey-Ehrmann K. (1989). Modélisation et étude d'une gestion coordonnée du réseau d'assainissement de la vallée d'Andlau. Strasbourg (France) : ENGEES, mémoire de DEA / IMFStrasbourg, 68 p.
- Hicks W.I. (1943). A method of computing urban runoff. *Transactions of the ASCE*, paper n° 2230, 1217-1268.
- Koussis A.D. (1976). An approximate dynamic flood routing method. *Proceedings of the International Symposium on Unsteady Flow in Open Channels*, paper L1, Newcastle-upon-Tyne, UK
- Koussis A.D. (1978). Theoretical estimations of flood routing parameters. *Journal of the Hydraulics Division*, 104(1), 109-115.
- Koussis A.D. (1980). Comparison of Muskingum method difference schemes. *Journal of the Hydraulics Division*, 106(5), 925-929.
- Kovacs Y. (1988). Modèles de simulation d'écoulement transitoire en réseau d'assainissement. Thèse de doctorat: ENPC, Paris, France, mai 1988, 328 p.
- Lencastre E. (1996). *Hydraulique générale*. Paris (France) : Eyrolles, 633 p. ISBN 2-212-01894-0.

- Mac Carthy G.T. (1940). Engineering construction : flood routing. Fort Belvoir, Virginia (USA) : The Engineering School
- Perumal M. (1989). Unification of Muskingum difference schemes. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(4), 536-543.
- Ponce V.M., Theurer F.D. (1982). Accuracy criteria in diffusion routing. *Journal of the Hydraulics Division*, 108(6), 747-757.
- Preissmann A. (1971). Modèles pour le calcul de la propagation des crues. *La Houille Blanche*, 3, 219-223.
- Rappaz J., Picasso M. (1998). Introduction à l'analyse numérique. Lausanne (Suisse) : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 256 p. ISBN 2-88074-363-X.
- Reynier B. (1978). Etude d'un modèle hydrologique urbain. Villeurbanne (France) : INSA de Lyon, rapport de DEA,
- Semsar Yazdi A.A. (1995). Mise au point d'une méthodologie d'évaluation et de comparaison des modèles de simulation hydraulique des réseaux d'assainissement. Thèse de doctorat : INSA de Lyon, Villeurbanne, France, avril 1995, 272 p.
- Singh V.P., Scarlatos P.D. (1987). Analysis of non linear Muskingum flood routing. *Journal of Hydraulic Engineering*, 113(1), 61-79.
- Strupczewski W., Kundzewicz Z. (1980). Muskingum method revisited. *Journal of Hydrology*, 48, 327-342.
- Taylor C., Al-Mashidani G., Davis J.M. (1974). A finite element approach to watershed runoff. *Journal of Hydrology*, 21, 231-246.
- Vazquez J., Zug M., Bellefleur D., Grandjean B., Scrivener O. (1999). Utilisation d'un réseau de neurones pour appliquer le modèle de Muskingum aux réseaux d'assainissement. *Revue des Sciences de l'Eau*, 12(3), 577-595.
- Watt W.E., Kidd C.H.R. (1975). QUURM - A realistic urban runoff model. *Journal of Hydrology*, 27, 225-235.
- Weinmann P.E., Laurenson E.M. (1979). Approximate flood routing methods : a review. *Journal of the Hydraulics Division*, 105(12), 1521-1536.