



LGCIE - Hydrologie Urbaine

Master « Génie Civil »

**Cours de Tronc Commun
« Expérimentation et modélisation »**

**CAPTEURS, ETALONNAGES
ET INCERTITUDES DE MESURE**

Jean-Luc BERTRAND-KRAJEWSKI

Edition 2013

Avertissement

Ces notes de cours correspondent à deux chapitres extraits de :

Bertrand-Krajewski J.-L., Laplace D., Joannis C., Chebbo G. (2000).
Mesures en hydrologie urbaine et assainissement.
Paris (France): Technique et Documentation, juin 2000, 794 p. ISBN 2-7430-0380-4.

Table des matières

4. PRINCIPES GENERAUX ET ETALONNAGE DES CAPTEURS.....	3
4.1 Introduction	3
4.2 Notions de base sur les capteurs et les chaînes de mesure.....	3
4.2.1 Eléments constitutifs d'une chaîne de mesure	3
4.2.2 Caractéristiques des capteurs et appareils de mesure	5
4.3 Etude des différentes erreurs instrumentales	7
4.4 Etalonnage des appareils de mesure	11
4.4.1 Principe de l'étalonnage	12
4.4.2 Détermination d'une droite d'étalonnage	14
4.4.2.1 Estimation des coefficients a et b	14
4.4.2.2 Estimation de la variance liée s_l^2	15
4.4.2.3 Variance s_a^2 de la constante a	15
4.4.2.4 Variance s_b^2 de la pente b	16
4.4.3 Comparaison de 2 droites d'étalonnage.....	17
4.4.3.1 Comparaison des variances liées s_l^2	17
4.4.3.2 Comparaison des pentes b avec variances liées égales	17
4.4.3.3 Comparaison des pentes b avec variances liées différentes	18
4.4.3.4 Comparaison des ordonnées avec variances liées égales.....	19
4.4.3.5 Comparaison des ordonnées avec variances liées différentes.....	20
4.4.4 Détermination d'une courbe d'étalonnage.....	20
4.4.4.1 Estimation de la variance liée s_l^2	21
4.4.4.2 Variance des coefficients a , b et c	21
4.4.4.3 Comparaison d'un polynôme de degré 2 avec une droite	22
4.5 Utilisation des courbes d'étalonnage	23
4.6 Vérification d'un appareil de mesure	25
4.7 Exemples d'étalonnage.....	27
4.7.1 Etalonnage d'un capteur piézorésistif.....	27
4.7.2 Etalonnage d'un pH-mètre	38
5. EVALUATION DES INCERTITUDES DE MESURE.....	42
5.1 Introduction	42
5.2 Valeur vraie, erreurs aléatoires et erreurs systématiques	42
5.2.1 Réduction des erreurs aléatoires	43
5.2.2 Réduction des erreurs systématiques	44
5.3 Méthodes d'estimation des incertitudes.....	45
5.3.1 Méthode de type A	45
5.3.2 Méthode de type B et loi de propagation des incertitudes	48
5.3.3 Méthode de Monte-Carlo	51
5.4 Exemple de calcul.....	53
5.4.1 Méthode de type B (loi de propagation des incertitudes)	54
5.4.2 Méthode de Monte-Carlo	55

4. PRINCIPES GENERAUX ET ETALONNAGE DES CAPTEURS

4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre comprend trois parties :

- les notions de base sur les capteurs et les chaînes de mesure ;
- les principales erreurs instrumentales ;
- les principes et méthodes d'étalonnage des instruments de mesure.

La troisième partie constitue le thème majeur de ce chapitre et comporte les développements les plus longs. En effet, l'étude des erreurs instrumentales montre qu'un étalonnage systématique des instruments de mesure avant leur installation sur site est indispensable pour obtenir des résultats de mesure fiables, corrigés des erreurs instrumentales éventuelles, et pour évaluer correctement les incertitudes de mesure qui sont traitées en détail au chapitre 5.

4.2 NOTIONS DE BASE SUR LES CAPTEURS ET LES CHAINES DE MESURE

4.2.1 Eléments constitutifs d'une chaîne de mesure

Nous ne présenterons ici que les notions de base indispensables aux deux paragraphes suivants, de nombreux ouvrages traitant plus en détail ces questions (par exemple Dally *et al.*, 1993 ; Asch *et al.*, 1998).

Généralement, la grandeur à mesurer, appelée mesurande, n'est pas accessible directement et les méthodes de mesure mises en œuvre font appel à différentes lois physiques et propriétés des matériaux (Ichinose et Kobayashi, 1990 ; Hauptmann, 1993). Une chaîne de mesure est généralement constituée des éléments suivants (Dally *et al.*, 1993), schématisés Figure 4.1 :

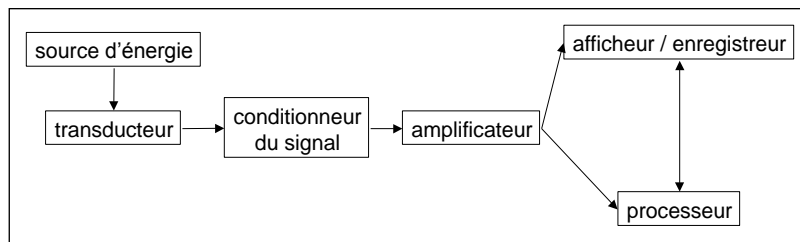


Figure 4.1 : schéma type d'une chaîne de mesure

- un **transducteur** : c'est l'élément fondamental du dispositif, fondé sur l'utilisation d'une loi physique particulière. Il fait correspondre à une valeur G_e de la grandeur à mesurer une valeur G_s d'une autre grandeur, généralement électrique, appelée grandeur de sortie. Par exemple, dans le cas d'un capteur piézorésistif destiné au mesurage de la hauteur d'eau d'un écoulement, à la pression exercée par la colonne d'eau sur le transducteur constitué d'une céramique correspond une valeur de la

résistance électrique du transducteur, celui-ci étant communément inclus dans un pont de Wheatstone (voir chapitre 10). On recherche généralement des transducteurs tels que la relation entre la variation du mesurande et la variation du signal sortant du transducteur soit linéaire, ou tout au moins à utiliser la partie linéaire de cette relation si celle-ci est plus complexe. Dans de nombreux cas, le transducteur a besoin d'une **source d'énergie** extérieure au milieu physique contenant le mesurande pour pouvoir fonctionner.

- le **conditionneur** : c'est un circuit électrique ou électronique qui convertit, compense ou modifie le signal de sortie du transducteur afin de le transformer en un signal électrique usuel tel qu'un courant, une tension, plus rarement une résistance ou une fréquence. Le conditionneur est souvent physiquement indissociable du transducteur. Le pont de Wheatstone évoqué à l'alinéa précédent permet ainsi de transformer la variation de résistance du transducteur en une variation de tension aux bornes du pont. Les conditionneurs mettent en œuvre de nombreuses fonctions telles que les filtres, les modulateurs et démodulateurs, les intégrateurs et les différentiateurs, etc.
- l'**amplificateur** : c'est un élément indispensable lorsque le signal de sortie du conditionneur est faible, ce qui est le cas le plus fréquent. Sachant que ces signaux de sortie sont de l'ordre de quelques millivolts ou microampères, ou moins, il est nécessaire de les amplifier dans des rapports de 10 à 1000, ou plus. Après amplification, on atteint des tensions comprises généralement entre 0 et 5 ou 10 V. Ces signaux amplifiés sont alors dirigés vers les éléments suivants de la chaîne de mesure. Le signal analogique fourni par le capteur peut être une tension 0-5 V ou une intensité 0-20 mA ou 4-20 mA. Le signal ainsi transmis est à l'origine du terme **transmetteur** souvent utilisé pour désigner cette partie de la chaîne de mesure, en incluant souvent sous ce vocable l'élément suivant qui est l'afficheur. Notons ici que la sortie analogique courant 4-20 mA est un standard industriel. Le signal peut être transmis dans de bonnes conditions sur des distances supérieures à 100 m, sous réserve d'utiliser du câble torsadé, voire blindé, et raccordé à la masse, en évitant la proximité avec des câbles électriques de puissance. Les sorties analogiques en tension 0-5 ou 0-10 V sont moins pratiques parce qu'elles sont sensibles aux parasites et qu'il faut également tenir compte de l'impédance du câble de liaison entre le transmetteur et la centrale d'acquisition de données si elle n'est pas négligeable devant celle de l'enregistreur.
- l'**afficheur/enregistreur** : c'est un élément qui mesure le signal (courant ou tension) sortant de l'amplificateur pour le restituer sous une forme lisible et interprétable par l'utilisateur. Il peut être analogique (par exemple lecture de la valeur mesurée G_e par repérage de la position d'une aiguille sur un cadran comportant une échelle graduée) ou numérique (par exemple lecture directe d'une valeur numérique G_e sur un afficheur à diodes ou à cristaux liquides). Dans ce dernier cas, l'afficheur est en lien avec un **processeur** qui a pour fonction de transformer le signal analogique sortant de l'amplificateur en signal numérique dirigé vers l'afficheur. L'afficheur peut également avoir une fonction d'enregistreur.
- le **processeur** : cet élément est présent sur tous les dispositifs de mesure affichant et/ou délivrant un signal numérique. Il s'agit généralement d'un convertisseur analogique/numérique (voir chapitre 23). Les données numériques produites peuvent

être restituées sous forme d'affichage numérique, de graphiques, de tableaux, de fichiers informatiques, de signal numérique formaté, etc.

Dans la pratique, le terme « capteur » désigne des choses différentes selon les auteurs et les interlocuteurs :

- le transducteur lui-même ;
- l'ensemble transducteur + conditionneur ;
- l'ensemble de la chaîne de mesure représentée Figure 4.1.

Les distinctions sont parfois difficiles car de plus en plus de transducteurs sont physiquement associés à des conditionneurs et des amplificateurs, les progrès de la miniaturisation ayant permis de réduire considérablement la taille de ces éléments et le passage de l'analogique au numérique ayant conduit à intégrer de nombreux éléments de la chaîne de mesure au plus près possible du mesurande. L'intérêt principal de cette intégration matérielle réside dans la réduction des perturbations du signal de sortie du transducteur (interférences, parasites, pertes d'énergie et de signal, etc.) avant son traitement par les éléments suivants.

Dans cet ouvrage, par souci de commodité et pour conserver une terminologie fréquente, nous appellerons capteur la partie de la chaîne de mesure en contact avec le milieu où s'effectue le mesurage, et transmetteur le reste des éléments de la chaîne de mesure, l'ensemble étant désigné sous le terme générique appareil de mesure. Cette acceptation du terme capteur est un peu plus large que celle définie dans la norme NF X 07-001 (1994) et reprise dans le lexique en fin d'ouvrage : « élément d'un appareil de mesure ou d'une chaîne de mesure qui est directement soumis à l'action du mesurande ». Des termes plus précis seront employés lorsque cela sera nécessaire pour éviter toute ambiguïté.

4.2.2 Caractéristiques des capteurs et appareils de mesure

Les capteurs et chaînes de mesure peuvent être définis par un certain nombre de caractéristiques (Cerr, 1980 cité par Ragot *et al.*, 1990 ; norme NF X 07-001, 1994). Nous indiquons ci-après les principales d'entre elles, les termes suivis d'un astérisque étant extraits de la norme NF X 07-001 (1994) et repris dans le lexique en fin d'ouvrage :

- l'étendue de mesure (EM)* : ensemble des valeurs du mesurande pour lesquelles l'erreur de mesure est supposée comprise entre des limites spécifiées.
- le domaine de non détérioration : il est défini par les valeurs limites que peuvent atteindre et conserver le mesurande et les grandeurs d'influence sans que les caractéristiques métrologiques du capteur ne soient altérées après retour des valeurs dans le domaine nominal.

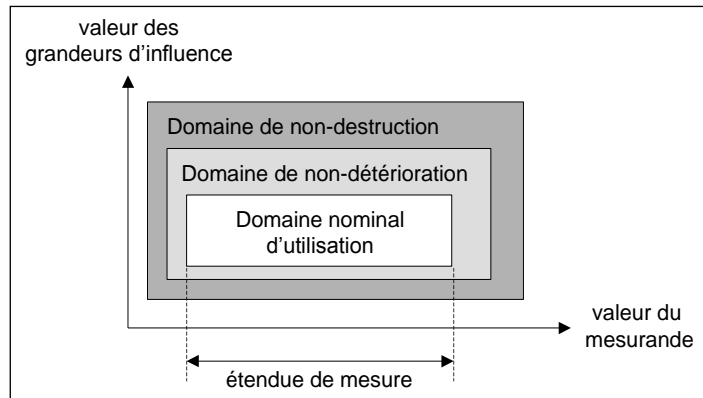


Figure 4.2 : limites d'utilisation d'un capteur (extrait de Ragot *et al.*, 1990)

- le domaine de non-destruction : il est défini par les valeurs limites que peuvent atteindre le mesurande et les grandeurs d'influence sans qu'il y ait détérioration irréversible ou destruction physique du capteur. Dans le cas contraire, le capteur doit être changé.
- la sensibilité* : quotient S_e de l'accroissement de la réponse d'un instrument de mesure par l'accroissement correspondant du signal d'entrée :

$$S_e = \frac{\Delta G_s}{\Delta G_e} \quad \text{Eq. 4.1}$$

La valeur de la sensibilité peut dépendre de la valeur du signal d'entrée. Cette définition sous forme de quotient suppose que la relation liant le signal de sortie du capteur au signal d'entrée associé au mesurande est linéaire, ou qu'elle peut être représentée de manière approchée mais satisfaisante par une droite.

- le seuil de mobilité* : variation la plus grande du signal d'entrée qui ne provoque pas de variation détectable de la réponse d'un instrument de mesure, la variation du signal d'entrée étant lente et monotone.
- la résolution* : plus petite différence d'indication d'un dispositif afficheur qui peut être perçue de manière significative. Pour un afficheur numérique, cette différence d'indication correspond au changement d'une unité du chiffre le moins significatif.
- la répétabilité* : étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, avec les mesurages effectués dans la totalité des mêmes conditions de mesure. Ces conditions sont appelées conditions de répétabilité. Elles comprennent : même mode opératoire, même observateur, même instrument de mesure utilisé dans les mêmes conditions, même lieu, répétition des mesurages durant une courte période de temps.
- la reproductibilité* : étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages du même mesurande, avec les mesurages effectués en faisant varier les conditions de mesure. Pour qu'une expression de la reproductibilité soit valable, il est nécessaire de spécifier les conditions que l'on fait varier. Celles-ci peuvent comprendre : principe de mesure, méthode de mesure, observateur, instrument de mesure, étalon de référence, lieu, conditions d'utilisation, temps.

- la discrétion* : aptitude d'un instrument de mesure à ne pas modifier le mesurande.
- la vitesse de poursuite* (ou rapidité) : aptitude du capteur à suivre dans le temps les variations du mesurande. Une vitesse de poursuite élevée permet de suivre des variations rapides du mesurande. La vitesse de poursuite dépend du temps de réponse du capteur et de son fonctionnement en régime transitoire (réponse à une impulsion, à un échelon, à un régime sinusoïdal, etc.). Elle peut être caractérisée de diverses manières, et notamment par la fréquence propre f_0 du capteur : plus f_0 est grande, plus la vitesse de poursuite est élevée (Asch *et al.*, 1998).

4.3 ETUDE DES DIFFERENTES ERREURS INSTRUMENTALES

Un capteur idéal doit fournir un signal de sortie G_s (réponse) proportionnel au signal d'entrée G_e sur l'étendue de mesure. En dehors de l'étendue de mesure, la réponse du capteur n'est plus nécessairement linéaire. Ces notions de base sont représentées Figure 4.3. Sur l'étendue de mesure, délimitée par les bornes $G_{e\ min}$ et $G_{e\ max}$ correspondant respectivement aux valeurs minimum et maximum de la grandeur que l'on veut mesurer, on construit généralement le capteur de telle sorte que la valeur G_s de la grandeur de sortie correspondant à la valeur G_e du mesurande soit donnée par la relation linéaire suivante :

$$G_s = S_e G_e + Z_0 \tag{Eq. 4.2}$$

avec S_e la sensibilité du capteur et Z_0 l'offset.

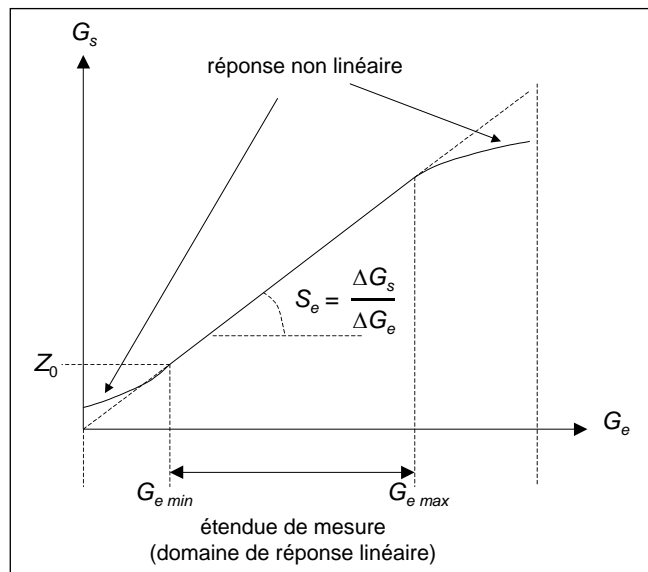


Figure 4.3 : réponse G_s d'un capteur en fonction de la valeur G_e du mesurande

L'offset Z_0 est souvent appelé « Zéro » car, dans de nombreux cas, la réponse G_s du capteur est fixée ou ajustée mécaniquement ou électriquement à 0 (zéro) pour $G_e = G_{e\ min}$. Dans ces conditions, la relation précédente se simplifie :

$$G_s = S_e G_e \quad \text{Eq. 4.3}$$

Par exemple, un capteur piézorésistif monté sur un pont de Wheatstone et destiné à mesurer une hauteur d'eau dans un écoulement à surface libre pourra être réglé de telle sorte qu'il donne un courant G_s égal à 0 mA lorsque la pression G_e à laquelle est soumis le capteur est égale à la pression atmosphérique prise comme référence (c'est à dire lorsque la hauteur d'eau est nulle).

Notons dès à présent que le rôle de l'afficheur ou du processeur de la chaîne de mesure consiste à restituer, de manière analogique ou numérique selon les cas, la valeur G_e du mesurande à partir de la valeur G_s du signal de sortie du capteur en inversant l'Eq. 4.2 :

$$G_e = \frac{G_s - Z_0}{S_e} \quad \text{Eq. 4.4}$$

Reprenons notre exemple de capteur piézorésistif en le complétant. La grandeur d'entrée G_e est la hauteur d'eau h , comprise entre 0 et 2 m. D'où l'étendue de mesure $EM(h) = 2$ m. La grandeur de sortie G_s est un courant I_c 4-20 mA. D'où l'étendue de mesure $EM(I_c) = 20 - 4 = 16$ mA, avec un offset $Z_0 = 4$ mA. Les deux relations équivalentes qui lient h à I_c sont :

$$I_c = \frac{EM(I_c)}{EM(h)} h + Z_0 = 8h + 4 \quad \text{Eq. 4.5}$$

et

$$h = (I_c - Z_0) \frac{EM(h)}{EM(I_c)} = \frac{I_c - 4}{8} = \frac{I_c}{8} - 0,5 \quad \text{Eq. 4.6}$$

Dans la pratique, les capteurs ne sont pas idéaux et des écarts existent qui conduisent à des erreurs systématiques. Parmi ces erreurs, qui sont généralement analysées sur l'ensemble de la chaîne de mesure mais qui peuvent également être analysées au niveau du capteur ou du transducteur lui-même, les quatre principales sont :

- l'erreur d'offset (Figure 4.4) : dans ce cas, l'offset est décalé et vaut Z_0' au lieu de Z_0 . La valeur théorique attendue G_s pour une valeur G_e du mesurande est remplacée par une valeur G_s' telle que la différence $G_s' - G_s$ est constante sur l'étendue de mesure et égale à l'erreur d'offset ;
- l'erreur de sensibilité (Figure 4.5) : dans ce cas, la sensibilité (ou pente) S_e est incorrecte et vaut S_e' au lieu de S_e . La valeur théorique attendue G_s pour une valeur G_e du mesurande est remplacée par une valeur G_s' telle que le rapport G_s'/G_s est égal au rapport des pentes S_e'/S_e ;

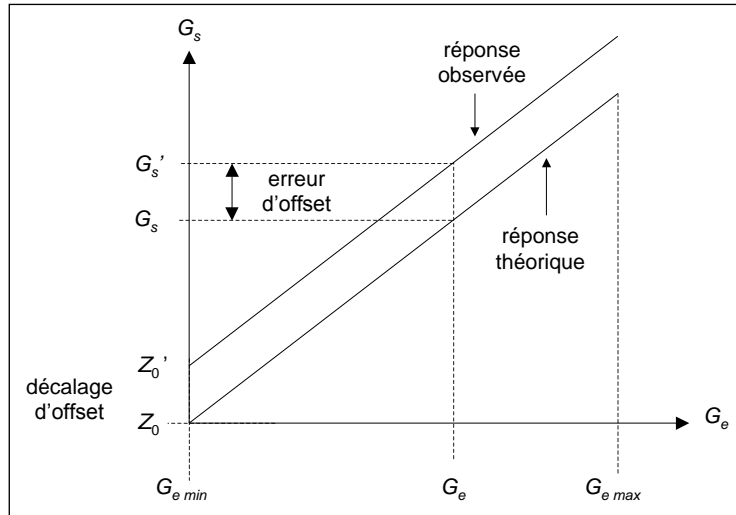


Figure 4.4 : illustration d'une erreur d'offset (ou de Zéro) sur un capteur

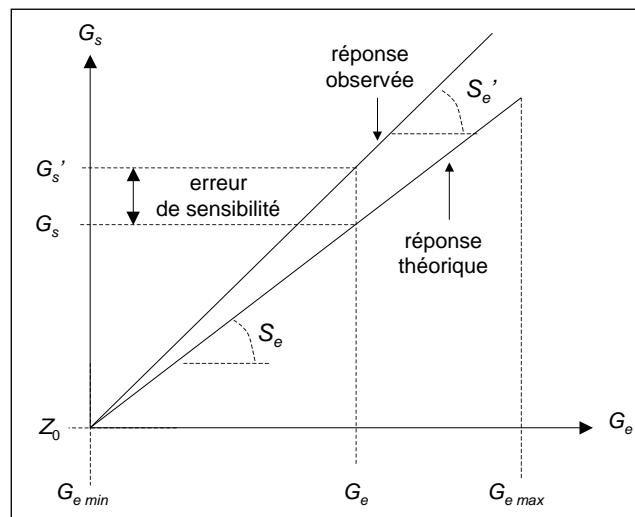


Figure 4.5 : illustration d'une erreur de sensibilité (ou de pente) sur un capteur

- l'erreur liée aux grandeurs d'influence (Figure 4.6) : dans ce cas, les grandeurs d'influence peuvent conduire à une valeur observée G_s' présentant simultanément une erreur d'offset et une erreur de sensibilité. Il est bien sûr possible de rencontrer des cas où ces deux erreurs peuvent être présentes simultanément, en raison d'un mauvais étalonnage, sans que les grandeurs d'influence n'interviennent. Dans ces deux cas, l'offset est décalé et vaut Z_0' au lieu de Z_0 et la sensibilité S_e est incorrecte et vaut S_e' au lieu de S_e . La valeur théorique attendue G_s pour une valeur G_e du mesurande est remplacée par une valeur G_s' telle que :

$$G_s' = \frac{S_e'}{S_e}(G_s - Z_0) + Z_0'$$

- l'erreur de linéarité : dans ce cas, la relation liant G_s à G_e n'est plus linéaire, ou tout au moins ne peut plus être assimilée à une droite sans conduire à des erreurs dépassant les limites spécifiées. Elle est exprimée en pourcentage de la valeur maximale de l'étendue de mesure (EM).

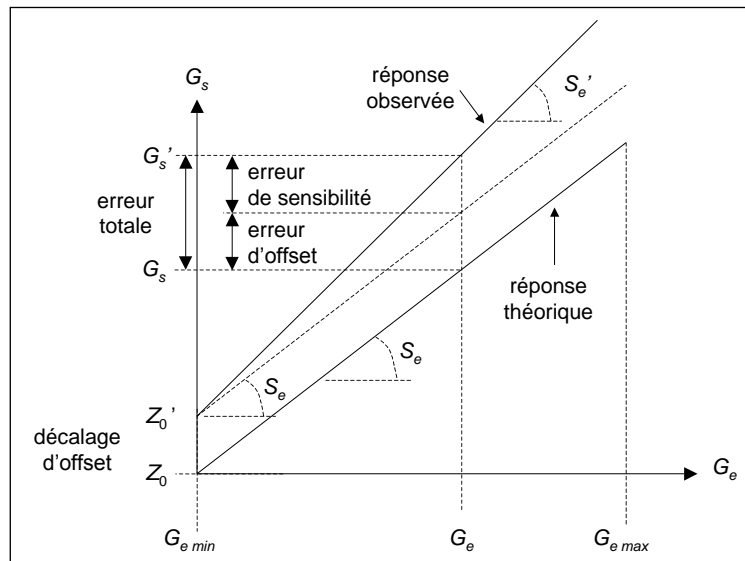


Figure 4.6 : illustration d'une erreur due aux grandeurs d'influence et/ou aux erreurs simultanées d'offset et de sensibilité

Les deux premières erreurs peuvent être étudiées et corrigées au moyen de l'étalonnage des capteurs qui sera présenté dans le paragraphe 4.4. La troisième erreur, liée aux grandeurs d'influence telles que la pression, la température, etc., peut être corrigée si les lois physiques correspondantes sont connues. Par exemple, la vitesse d'un écoulement mesurée par des ondes ultrasonores doit être corrigée en fonction de la température car la vitesse de propagation des ultrasons dans l'eau varie avec la température (voir chapitre 15). C'est pourquoi les grandeurs d'influence doivent, le cas échéant, être mesurées et prises en compte lorsqu'on procède à des étalonnages rigoureux. Enfin, la quatrième erreur peut également être corrigée à partir d'un étalonnage de l'appareil et de la courbe d'étalonnage correspondante.

En plus de ces erreurs instrumentales systématiques, les chaînes de mesure présentent également des erreurs aléatoires inévitables qui affectent chacun de leurs éléments constitutifs lorsqu'ils fonctionnent conformément à leurs spécifications. L'erreur résultante E_{cm} pour l'ensemble de la chaîne de mesure est liée aux erreurs aléatoires indépendantes des différents éléments constitutifs par la relation :

$$E_{cm} = \sqrt{E_t^2 + E_c^2 + E_a^2 + E_{a/e}^2 + E_p^2} \quad \text{Eq. 4.7}$$

avec E_t erreur aléatoire liée au transducteur ;
 E_c erreur aléatoire liée au conditionneur ;
 E_a erreur aléatoire liée à l'amplificateur ;
 $E_{a/e}$ erreur aléatoire liée à l'afficheur/enregistreur ;
 E_p erreur aléatoire liée au processeur.

4.4 ÉTALONNAGE DES APPAREILS DE MESURE

Dans le cadre d'une bonne pratique métrologique, compte tenu des erreurs instrumentales mentionnées au paragraphe précédent, il n'est pas envisageable d'installer un appareil sur un site de mesure sans avoir procédé au préalable à son étalonnage afin, selon les cas, de :

- vérifier que l'appareil fonctionne ;
- vérifier que l'appareil de mesure ne présente ni erreur d'offset ni erreur de sensibilité, ou tout au moins que ces erreurs sont inférieures à des valeurs limites spécifiées par l'utilisateur ;
- procéder au réglage de l'appareil de mesure pour ramener les erreurs initialement constatées à des valeurs inférieures aux valeurs limites spécifiées par l'utilisateur ;
- établir une courbe ou une relation d'étalonnage permettant de corriger les valeurs fournies par l'appareil afin de déterminer les valeurs du mesurande avec une incertitude connue inférieure à une valeur limite spécifiée par l'utilisateur.

En pratique, on procède généralement de manière combinée à ces quatre types d'opérations.

Ce paragraphe a pour objectif de présenter les principes et méthodes d'étalonnage des appareils de mesure et l'usage que l'on peut faire des résultats de cet étalonnage pour la validation et la critique des données. Il aborde successivement :

- le principe de l'étalonnage ;
- la détermination des droites ou des courbes d'étalonnage ;
- l'utilisation de ces droites ou courbes pour l'estimation de la valeur vraie du mesurande et de l'écart type associé (pour les calculs d'incertitude, qui sont traités dans le chapitre 5, cet écart type est assimilé à l'incertitude type) ;
- la vérification des capteurs ;
- des exemples pratiques.

Une part importante des calculs présentés dans les paragraphes qui suivent fait appel à des notions et outils statistiques dont la présentation détaillée dépasse le cadre de cet ouvrage. Les lecteurs non familiers de ces outils trouveront quelques informations sommaires au fil du texte et dans les annexes 3 à 5 (tables de Student, du χ^2 , de Snedecor, etc., et fonctions Excel® correspondantes) et surtout dans les ouvrages de base de probabilités et statistiques (par exemple, Saporta, 1990 ; Wonnacott et Wonnacott, 1991 ; Anonyme, 1995a – CISIA-CERESTA ; Neuilly et CETAMA, 1998), ouvrages qui devraient faire partie de la documentation scientifique et technique de

toute personne souhaitant pratiquer correctement la métrologie tant les notions et outils statistiques sont indispensables à plusieurs opérations essentielles (étalonnage, calculs des incertitudes, traitement des données, etc.).

4.4.1 Principe de l'étalonnage

Le principe de l'étalonnage consiste à établir la relation, pour l'appareil de mesure étudié, liant les valeurs G_s fournies par l'appareil aux valeurs connues du mesurande G_e , celles-ci étant souvent obtenues au moyen d'étalons ou de dispositifs équivalents. Les opérations sont réalisées dans des conditions spécifiées telles que les grandeurs d'influence n'interviennent pas ou que leur influence est quantifiable (Figure 4.7).

A partir des observations réalisées et de la relation ainsi établie, il est possible, selon les besoins de l'utilisateur et/ou les possibilités du matériel, soit de procéder au réglage de l'offset et de la sensibilité de l'appareil pour faire coïncider les valeurs de G_s et de G_e , soit d'utiliser la relation établie pour corriger les indications fournies par l'appareil, ou de combiner ces deux méthodes.

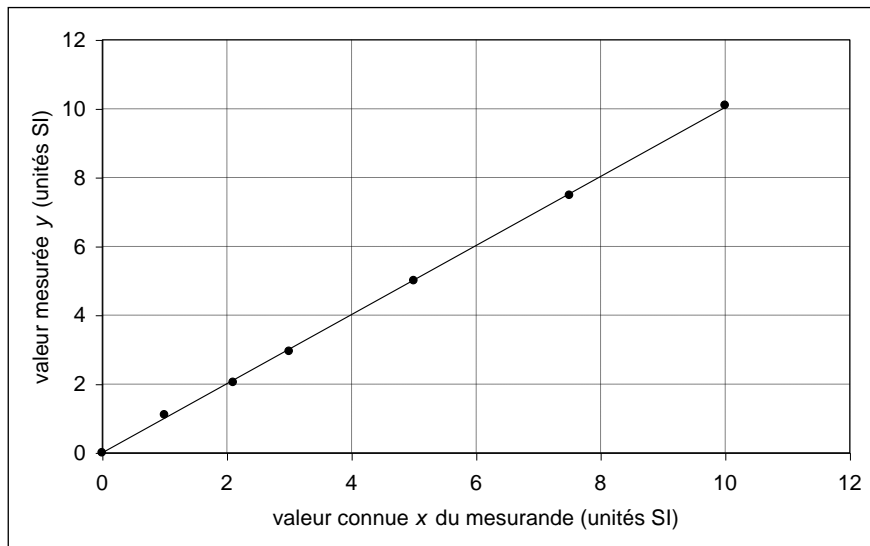


Figure 4.7 : exemple de courbe d'étalonnage

Dans la suite de ce paragraphe 4.4, nous simplifierons les écritures en notant x la valeur étalon du mesurande et y la valeur fournie par l'appareil. Les valeurs x sont des valeurs étalons dont l'incertitude est connue. Ou, si ce ne sont pas des étalons au sens métrologique du terme (voir chapitre 3), ce sont des valeurs mesurées certifiées dont l'incertitude est évaluée et est petite par rapport à l'incertitude sur la valeur mesurée y correspondante.

Avec ces notations, pour une valeur connue x_i donnée, la valeur y_i fournie par l'appareil de mesure est considérée comme une valeur particulière d'une variable aléatoire Y_i dont l'espérance mathématique peut s'écrire :

$$\bar{y}_i = F(x_i, A_F, B_F, C_F, \dots) \quad \text{Eq. 4.8}$$

avec $A_F, B_F, C_F \dots$ des paramètres numériques liés aux conditions expérimentales.

On peut alors écrire Y_i sous la forme :

$$Y_i = \bar{y}_i + \Delta_i = F(x_i, A_F, B_F, C_F, \dots) + \Delta_i \quad \text{Eq. 4.9}$$

avec Δ_i une variable aléatoire de moyenne nulle dont la variance σ_i^2 est appelée variance de Y liée à x . Cette variance liée est également appelée variance conditionnelle. Elle peut être constante dans tout le domaine de variation des x_i (généralement, il s'agit de l'étendue de mesure), ou varier avec x_i .

La courbe donnant \bar{y} en fonction de x est appelée courbe de régression de y en x . Un des objectifs de l'étalonnage est d'estimer cette courbe de régression par une équation de la forme :

$$y = f(x, a, b, c, \dots) \quad \text{Eq. 4.10}$$

Lorsque l'ajustement est correct, la fonction f a la même forme que la fonction F et les coefficients $a, b, c \dots$ sont des estimateurs, au sens statistique, des paramètres $A_F, B_F, C_F \dots$. L'ajustement est réalisé par la méthode classique des moindres carrés (manuellement ou par exemple avec le tableur Excel® en utilisant la fonction 'courbe de tendance'), certains logiciels d'ajustement numérique (par exemple Table Curve 2D®, SigmaPlot®...) faisant appel à des algorithmes plus généraux tels que celui de Marquardt-Levenberg (Marquardt, 1963).

On appelle résidu la valeur :

$$\varepsilon_i = y_i - f(x_i, a, b, c, \dots) \quad \text{Eq. 4.11}$$

Les résidus sont des variables aléatoires dont la variance, appelée variance résiduelle, n'est due qu'à la variance liée si la fonction f est correcte et si les valeurs x_i sont connues sans erreurs.

On cherche en général, pour des raisons de simplicité et de commodité d'emploi, à établir des relations f sous forme de droites. Si, au vu des résultats de tests statistiques présentés plus loin dans ce chapitre, une droite n'est pas appropriée pour décrire les observations, on peut utiliser des relations f plus complexes, souvent du type polynôme de degré 2 ou plus (rappelons ici que pour déterminer un polynôme de degré n , il est nécessaire de disposer d'au moins $(n+1)$ valeurs). Cependant, au delà du degré 2, la détermination du mesurande à partir de la valeur fournie par l'appareil n'est plus directe et fait appel à des méthodes numériques de recherche des racines, ce qui a pour effet de limiter son emploi pratique malgré les moyens de calcul numérique facilement disponibles sur micro-ordinateurs depuis le milieu des années 1980.

Enfin, et contrairement à une pratique encore relativement fréquente, il nous paraît important de noter dès à présent que le coefficient de corrélation r classique est insuffisant pour évaluer la qualité de l'ajustement de la fonction f sur les points

expérimentaux. En effet, comme on cherche à établir une relation entre des valeurs connues et les valeurs indiquées par l'appareil, on obtient toujours des valeurs de r^2 élevées et très proches de 1, ceci quelle que soit la courbe d'étalonnage retenue (droite, polynômes de degré 2 ou 3). Cela signifie simplement qu'il existe une relation forte entre valeur connue et valeur mesurée, ce qui est le moins que l'on puisse attendre d'un appareil de mesure ! (dans le cas contraire, il faudra sérieusement mettre en doute l'appareil, ses conditions de mise en œuvre ou son réglage, etc.). C'est pourquoi nous utiliserons dans ce chapitre des tests statistiques plus élaborés (par exemple test de Student, de Snedecor, de Welch...), mais plus discriminants que le coefficient de corrélation pour choisir la courbe d'étalonnage la plus adaptée.

4.4.2 Détermination d'une droite d'étalonnage

Dans le cas, de loin le plus fréquent pour l'étalonnage des instruments de mesure, où on établit une droite d'étalonnage, on cherche à ajuster une relation linéaire de la forme :

$$\bar{y}_i = A_F + B_F x_i \quad \text{Eq. 4.12}$$

Si on procède à l'étalonnage en utilisant m valeurs connues x_i et en procédant à la lecture de n_i valeurs de y pour chaque valeur de x_i , on obtient un ensemble de N couples de valeurs (x_i, y_{ik}) , avec i de 1 à m et k de 1 à n_i et avec N donné par la relation :

$$N = \sum n_i \quad \text{Eq. 4.13}$$

En toute rigueur, les relations qui suivent ne sont applicables que dans le cas où les variances s_i^2 de l'échantillon des n_i valeurs y_{ik} pour une valeur de x_i donnée, calculées par l'Eq. 4.14, sont constantes et ne varient pas (ou peu) en fonction de x_i .

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_k (y_{ik} - \bar{y}_i)^2 \quad \text{Eq. 4.14}$$

Dans le cas contraire, il faut procéder à une pondération des couples de points (x_i, y_{ik}) , cas plus complexe qui ne sera pas traité ici (voir par exemple Neuilly et CETAMA, 1998).

4.4.2.1 Estimation des coefficients a et b

Dans ces conditions, les coefficients a et b qui sont les estimateurs des paramètres A_F et B_F sont calculés au moyen des 4 relations :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} \quad \text{Eq. 4.15}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_i \sum_k y_{ik}}{N} \quad \text{Eq. 4.16}$$

$$b = \frac{\sum_i \sum_k (x_i - \bar{x})(y_{ik} - \bar{y})}{\sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{Eq. 4.17}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \text{Eq. 4.18}$$

4.4.2.2 Estimation de la variance liée s_l^2

En notant $\hat{y}_i = f(x_i)$ la valeur de y_i estimée par la fonction f , la variance liée σ_l^2 est estimée par la valeur s_l^2 donnée par la relation :

$$s_l^2 = \frac{\sum_i \sum_k (y_{ik} - \hat{y}_i)^2}{N - 2} \quad \text{Eq. 4.19}$$

Pour un calcul manuel, on peut utiliser la relation plus pratique suivante :

$$s_l^2 = \frac{1}{N - 2} \left(\sum_i \sum_k (y_{ik} - \bar{y})^2 - b^2 \sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2 \right) \quad \text{Eq. 4.20}$$

Si la relation entre les valeurs x_i et les valeurs moyennes \bar{y}_i est bien linéaire et si les valeurs x_i sont connues sans erreur, la variance résiduelle de l'ajustement est égale à la variance liée.

4.4.2.3 Variance s_a^2 de la constante a

L'estimation de la constante a dépend des N couples de valeurs de l'étalonnage et doit donc être considérée comme une variable aléatoire. Sa variance estimée s_a^2 est donnée par la relation :

$$s_a^2 = s_l^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{(\bar{x})^2}{\sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2} \right) \quad \text{Eq. 4.21}$$

Pour déterminer l'intervalle de confiance bilatéral au niveau $(1-\alpha)$ de la constante A_F , on utilise la variable de Student, notée t , pour $(N-2)$ degrés de liberté, qui permet d'écrire directement :

$$a - s_a t_{1-\alpha/2}(N-2) \leq A_F \leq a + s_a t_{1-\alpha/2}(N-2) \quad \text{Eq. 4.22}$$

Les valeurs de t sont lues dans les tables statistiques (voir Annexe 3) ou calculées directement par les fonctions numériques correspondantes dans des tableurs ou autres logiciels de calcul numérique.

Il peut souvent être utile de vérifier que l'estimateur a de la constante A_F est bien égal à une valeur théorique connue A_{F0} , par exemple $A_{F0} = 0$, lorsqu'on compare, pour un appareil de mesure donné, les valeurs mesurées et les valeurs connues d'une même grandeur (cas d'une droite passant par l'origine).

On fait l'hypothèse H_0 ($a = A_{F0}$). Si :

$$\frac{|a - A_{F0}|}{s_a} \leq t_{1-\alpha/2}(N-2) \quad \text{Eq. 4.23}$$

on accepte l'hypothèse H_0 . Sinon, on rejette cette hypothèse, avec un risque α de se tromper.

4.4.2.4 Variance s_b^2 de la pente b

L'estimation de la pente b dépend des N couples de valeurs de l'étalonnage et doit donc être considérée comme une variable aléatoire. Sa variance estimée s_b^2 est donnée par la relation :

$$s_b^2 = \frac{s_l^2}{\sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{Eq. 4.24}$$

Pour déterminer l'intervalle de confiance bilatéral au niveau $(1-\alpha)$ de la pente B_F , on utilise la variable de Student, notée t , pour $(N-2)$ degrés de liberté, qui permet d'écrire directement :

$$b - s_b t_{1-\alpha/2}(N-2) \leq B_F \leq b + s_b t_{1-\alpha/2}(N-2) \quad \text{Eq. 4.25}$$

Les valeurs de t sont lues dans les tables statistiques (voir Annexe 3) ou calculées directement par les fonctions numériques correspondantes dans des tableurs ou autres logiciels de calcul numérique.

Il peut souvent être utile de vérifier que l'estimateur b de la pente B_F est bien égal à une valeur théorique connue B_{F0} , par exemple $B_{F0} = 1$, lorsqu'on compare, pour un appareil de mesure donné, les valeurs mesurées et les valeurs connues d'une même grandeur.

On fait l'hypothèse H_0 ($b = B_{F0}$). Si :

$$\frac{|b - B_{F0}|}{s_b} \leq t_{1-\alpha/2}(N-2) \quad \text{Eq. 4.26}$$

on accepte l'hypothèse H_0 . Sinon, on rejette cette hypothèse, avec un risque α de se tromper.

4.4.3 Comparaison de 2 droites d'étalonnage

La comparaison de 2 droites d'étalonnage est une opération importante, notamment pour comparer des étalonnages successifs du même appareil de mesure afin de savoir, avec un niveau de confiance $(1-\alpha)$ donné, si les droites d'étalonnage sont significativement différentes ou non l'une de l'autre. Cela permet de mettre en évidence des dérives de la réponse de l'appareil de mesure au cours du temps.

Pour procéder à la comparaison des deux droites, il faut préalablement vérifier que leurs variances liées ne sont pas différentes au moyen du test de Snedecor appliqué au rapport des deux variances. On compare ensuite les pentes des deux droites et, si ces pentes sont égales, les ordonnées des droites pour une abscisse donnée. L'ensemble des calculs est détaillé dans les paragraphes suivants, en utilisant l'indice 1 pour les valeurs relatives à la première droite et l'indice 2 pour les valeurs relatives à la deuxième droite.

4.4.3.1 Comparaison des variances liées s_l^2

On forme le rapport $F = \frac{s_{l1}^2}{s_{l2}^2}$ que l'on compare ensuite aux valeurs limites suivantes

données par la table de Snedecor (voir Annexe 4) ou la fonction Excel® correspondante au niveau de probabilité $(1-\alpha)$:

$$F_{inf} = F_{\alpha/2}(N_1 - 2; N_2 - 2) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(N_1 - 2; N_2 - 2)}$$

$$\text{et } F_{sup} = F_{1-\alpha/2}(N_1 - 2, N_2 - 2)$$

Si le rapport F des variances calculées est compris entre F_{inf} et F_{sup} , on admet que les variances liées sont égales. Sinon, on admet qu'elles sont différentes avec un risque de se tromper égal à α .

4.4.3.2 Comparaison des pentes b avec variances liées égales

Si les variances liées sont égales, la comparaison des pentes est réalisée au moyen du test de Student. On calcule préalablement une variance liée commune notée s_{lc}^2 par la relation :

$$s_{lc}^2 = \frac{(N_1 - 2)s_{l1}^2 + (N_2 - 2)s_{l2}^2}{N_1 + N_2 - 4} \quad \text{Eq. 4.27}$$

On calcule ensuite de nouveaux estimateurs des variances des pentes à partir de cette variance commune par les deux relations :

$$s_{b1}^2 = \frac{s_{lc}^2}{\sum_i n_i (x_{1i} - \bar{x}_1)^2} \quad \text{Eq. 4.28}$$

$$s_{b2}^2 = \frac{s_{lc}^2}{\sum_i n_i (x_{2i} - \bar{x}_2)^2} \quad \text{Eq. 4.29}$$

Le test consiste à calculer la valeur numérique de la variable t définie par :

$$t = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{s_{b1}^2 + s_{b2}^2}} \quad \text{Eq. 4.30}$$

avec un nombre de degrés de liberté $\nu = N_1 + N_2 - 4$.

On compare ensuite la valeur de t aux limites $\pm t_{1-\alpha/2}$ données par la table de Student (Annexe 3) ou la fonction Excel® correspondante : si la valeur est hors de cet intervalle, on admet que les pentes sont différentes avec un risque de se tromper égal à α .

Si les pentes sont considérées comme identiques, on procède ensuite à la comparaison des ordonnées en un point. Sinon, la comparaison est terminée.

4.4.3.3 Comparaison des pentes b avec variances liées différentes

Si les variances liées sont significativement différentes, la comparaison des pentes n'est pas possible directement par le test de Student précédent. On utilise alors le test de Welch (Neuilly et CETAMA, 1998), dans lequel les variances s_b^2 des pentes sont prises égales aux valeurs initiales obtenues lors du calcul des droites (et non pas recalculées à partir de la variance liée commune comme dans le cas précédent). Le test consiste à calculer la valeur numérique de la variable t définie par :

$$t = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{s_{b1}^2 + s_{b2}^2}} \quad \text{Eq. 4.31}$$

avec un nombre de degrés de liberté défini par la relation :

$$\nu = \frac{(s_{b1}^2 + s_{b2}^2)^2}{\frac{s_{b1}^4}{N_1 - 2} + \frac{s_{b2}^4}{N_2 - 2}} \quad \text{Eq. 4.32}$$

On compare ensuite la valeur de t aux limites $\pm t_{1-\alpha/2}$ données par la table de Student (Annexe 3) ou la fonction Excel[®] correspondante : si la valeur est hors de cet intervalle, on admet que les pentes sont différentes avec un risque de se tromper égal à α .

Si les pentes sont considérées comme identiques, on procède ensuite à la comparaison des ordonnées en un point donné. Sinon, la comparaison est terminée.

4.4.3.4 Comparaison des ordonnées avec variances liées égales

On choisit une abscisse x_0 commune aux deux domaines de variation des valeurs x_{1i} et x_{2i} , et la plus proche possible des deux valeurs \bar{x}_1 et \bar{x}_2 . Les droites seront considérées comme confondues si les deux valeurs calculées

$$\hat{y}_1 = \bar{y}_1 + b_1(x_0 - \bar{x}_1) \quad \text{Eq. 4.33}$$

$$\hat{y}_2 = \bar{y}_2 + b_2(x_0 - \bar{x}_2) \quad \text{Eq. 4.34}$$

peuvent être admises comme étant égales.

On calcule leurs variances respectives par les relations :

$$s_{\hat{y}_1}^2 = s_{lc}^2 \left[\frac{1}{N_1} + \frac{(x_0 - \bar{x}_1)^2}{\sum_i n_i (x_{1i} - \bar{x}_1)^2} \right] \quad \text{Eq. 4.35}$$

$$s_{\hat{y}_2}^2 = s_{lc}^2 \left[\frac{1}{N_2} + \frac{(x_0 - \bar{x}_2)^2}{\sum_i n_i (x_{2i} - \bar{x}_2)^2} \right] \quad \text{Eq. 4.36}$$

Si les variances liées sont égales, on utilise le test de Student avec la variable t définie par :

$$t = \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_2}{\sqrt{s_{\hat{y}_1}^2 + s_{\hat{y}_2}^2}} \quad \text{Eq. 4.37}$$

avec un nombre de degrés de liberté $\nu = N_1 + N_2 - 4$.

On compare ensuite la valeur de t aux limites $\pm t_{1-\alpha/2}$ données par la table de Student (Annexe 3) ou la fonction Excel[®] correspondante : si la valeur est hors de cet intervalle, on admet que les ordonnées sont différentes avec un risque de se tromper égal à α .

4.4.3.5 Comparaison des ordonnées avec variances liées différentes

Si les variances liées sont différentes, on utilise à nouveau le test de Welch avec :

$$s_{\hat{y}_1}^2 = s_{l1}^2 \left[\frac{1}{N_1} + \frac{(x_0 - \bar{x}_1)^2}{\sum_i n_i (x_{1i} - \bar{x}_1)^2} \right] \quad \text{Eq. 4.38}$$

$$s_{\hat{y}_2}^2 = s_{l2}^2 \left[\frac{1}{N_2} + \frac{(x_0 - \bar{x}_2)^2}{\sum_i n_i (x_{2i} - \bar{x}_2)^2} \right] \quad \text{Eq. 4.39}$$

et la variable t définie par :

$$t = \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_2}{\sqrt{s_{\hat{y}_1}^2 + s_{\hat{y}_2}^2}} \quad \text{Eq. 4.40}$$

avec un nombre de degrés de liberté donné par la relation :

$$v = \frac{(s_{\hat{y}_1}^2 + s_{\hat{y}_2}^2)^2}{\frac{s_{\hat{y}_1}^4}{N_1 - 2} + \frac{s_{\hat{y}_2}^4}{N_2 - 2}} \quad \text{Eq. 4.41}$$

On compare ensuite la valeur de t aux limites $\pm t_{1-\alpha/2}$ données par la table de Student (Annexe 3) ou la fonction Excel[®] correspondante : si la valeur est hors de cet intervalle, on admet que les ordonnées sont différentes avec un risque de se tromper égal à α .

4.4.4 Détermination d'une courbe d'étalonnage

Dans le cas où on cherche à établir une courbe d'étalonnage sous forme de polynôme (d'autres fonctions que les polynômes peuvent parfois être employées pour des besoins spécifiques), l'Eq. 4.8 devient :

$$\bar{y}_i = A_F + B_F x_i + C_F x_i^2 + \dots \quad \text{Eq. 4.42}$$

Nous nous limiterons dans ce paragraphe à présenter les calculs pour le polynôme de degré 2, la méthode étant simplement étendue et adaptée pour les polynômes de degrés supérieurs. Le choix d'augmenter le degré du polynôme, c'est à dire d'augmenter la complexité de la courbe d'étalonnage, est fondé sur la comparaison des variances résiduelles au moyen du test de Snedecor.

L'ajustement d'un polynôme de degré 2 sur les N couples (x_i, y_{ik}) par les moindres carrés fait appel à des calculs matriciels plus complexes que pour une droite. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de la méthode, nous indiquons simplement les calculs à effectuer. En considérant que les variances s_l^2 sont approximativement constantes sur l'étendue de mesure, on est conduit à résoudre le système suivant :

$$[M_1][M_2] = [M_3] \quad \text{Eq. 4.43}$$

avec

$$M_1 = \begin{bmatrix} N & \sum_i n_i x_i & \sum_i n_i x_i^2 \\ \sum_i n_i x_i & \sum_i n_i x_i^2 & \sum_i n_i x_i^3 \\ \sum_i n_i x_i^2 & \sum_i n_i x_i^3 & \sum_i n_i x_i^4 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{bmatrix} \sum_i \sum_k y_{ik} \\ \sum_i \sum_k y_{ik} x_i \\ \sum_i \sum_k y_{ik} x_i^2 \end{bmatrix}$$

On obtient donc les valeurs des coefficients a , b et c par la relation :

$$[M_2] = [M_1]^{-1}[M_3] \quad \text{Eq. 4.44}$$

Les calculs ci-dessus peuvent être conduits manuellement à la calculatrice ou avec un tableur type Excel®, ou encore avec des logiciels d'ajustement numérique (Table Curve 2D®, SigmaPlot®... ou autres) qui donneront en plus les valeurs des variances, des intervalles de confiance, etc.

4.4.4.1 Estimation de la variance liée s_l^2

En notant $\hat{y}_i = f(x_i)$ la valeur de y_i estimée par la fonction f , la variance liée σ_l^2 est estimée par la valeur s_l^2 donnée par la relation :

$$s_l^2 = \frac{\sum_i \sum_k (y_{ik} - \hat{y}_i)^2}{N - 3} \quad \text{Eq. 4.45}$$

Si la relation entre les valeurs x_i et les valeurs moyennes \bar{y}_i suit bien une relation polynomiale de degré 2 et si les valeurs x_i sont connues sans erreur, la variance résiduelle de l'ajustement est égale à la variance liée.

4.4.4.2 Variance des coefficients a , b et c

Les variances estimées des coefficients a , b et c sont calculées à partir de la variance liée s_l^2 et des termes diagonaux correspondants de la matrice inverse $[M_2]^{-1}$ selon les relations suivantes :

$$s_a^2 = s_l^2 \cdot \frac{\sum_i n_i x_i^2 \sum_i n_i x_i^4 - \sum_i n_i x_i^3 \sum_i n_i x_i^3}{\det(M_1)} \quad \text{Eq. 4.46}$$

$$s_b^2 = s_l^2 \cdot \frac{\sum_i n_i \sum_i n_i x_i^4 - \sum_i n_i x_i^2 \sum_i n_i x_i^2}{\det(M_1)} \quad \text{Eq. 4.47}$$

$$s_c^2 = s_l^2 \cdot \frac{\sum_i n_i \sum_i n_i x_i^2 - \sum_i n_i x_i \sum_i n_i x_i}{\det(M_1)} \quad \text{Eq. 4.48}$$

avec $\det(M_2)$ le déterminant de la matrice $[M_2]$.

Pour déterminer les intervalles de confiance bilatéraux au niveau $(1-\alpha)$ des coefficients, on utilise la variable de Student, notée t , pour $(N-3)$ degrés de liberté, qui permet d'écrire directement :

$$a - s_a t_{1-\alpha/2}(N-3) \leq A_F \leq a + s_a t_{1-\alpha/2}(N-3) \quad \text{Eq. 4.49}$$

$$b - s_b t_{1-\alpha/2}(N-3) \leq B_F \leq b + s_b t_{1-\alpha/2}(N-3) \quad \text{Eq. 4.50}$$

$$c - s_c t_{1-\alpha/2}(N-3) \leq C_F \leq c + s_c t_{1-\alpha/2}(N-3) \quad \text{Eq. 4.51}$$

Les valeurs de t sont lues dans les tables statistiques (voir Annexe 3) ou calculées directement par les fonctions numériques correspondantes dans des tableurs ou autres logiciels de calcul numérique.

4.4.4.3 Comparaison d'un polynôme de degré 2 avec une droite

Afin de déterminer s'il est utile de passer d'une droite à un polynôme de degré 2 pour établir la courbe d'étalonnage d'un appareil de mesure, on compare les sommes des carrés des résidus de la droite et du polynôme de degré 2 en appliquant le test de Snedecor.

On calcule le rapport :

$$F = (N-3) \frac{(N-2)s_l^2 \text{droite} - (N-3)s_l^2 \text{poly2}}{(N-3)s_l^2 \text{poly2}} \quad \text{Eq. 4.52}$$

Pour un risque α donné, on compare cette valeur avec la valeur limite $F_{1-\alpha}(v_1, v_2)$ donnée par la table de Snedecor (Annexe 4) ou la fonction Excel® correspondante avec $v_1 = 1$ et $v_2 = N-3$.

Si F est supérieur à $F_{1-\alpha}$, cela signifie que les carrés des résidus sont significativement plus faibles avec un polynôme. On peut donc conclure avec un niveau de confiance égal à $(1-\alpha)$ que la relation n'est pas linéaire et qu'un polynôme de degré 2 représente mieux les observations.

La méthode peut bien sûr être étendue pour comparer, si nécessaire, des polynômes de degrés 2 et 3, ou 3 et 4, etc. La règle générale consiste à faire ces comparaisons dans l'ordre croissant des degrés, en s'arrêtant au plus petit degré pour lequel F est inférieur à $F_{1-\alpha}$.

Dans la très grande majorité des cas, les relations d'étalonnage des appareils de mesure sont des droites. Mais des polynômes sont souvent utiles pour établir des relations d'étalonnage dans des contextes différents, par exemple :

- étalonnage en intensité d'un pluviographe (voir chapitre 6) ;
- établissement d'une courbe d'étalonnage hauteur-débit (voir chapitre 11) ;
- relation entre la turbidité mesurée en continu et la concentration en MES ou en DCO (voir chapitre 22).

4.5 UTILISATION DES COURBES D'ETALONNAGE

Les courbes d'étalonnage permettent, à partir d'une valeur mesurée y_0 , de déterminer une estimation x_0 de la valeur vraie du mesurande et son écart type $s(x_0)$. Dans le cas d'une droite, on a :

$$x_0 = \frac{y_0 - a}{b} \quad \text{Eq. 4.53}$$

Dans le cas d'un polynôme de degré 2, on a :

$$x_0 = \frac{1}{2c} \left(\sqrt{b^2 + 4c(y_0 - a) - b} \right) \quad \text{Eq. 4.54}$$

Si la valeur y_0 correspond non pas à un mesurage unique mais à la moyenne de n_0 valeurs, on remplace y_0 par la valeur \bar{y}_0 dans les relations précédentes.

Pour des polynômes de degré supérieur ou pour d'autres fonctions, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques de résolution, par exemple la méthode de Newton.

La détermination de l'écart type $s(x_0)$ tient compte de deux contributions complémentaires :

- l'incertitude sur l'estimation des paramètres de la fonction f : elle entraîne une erreur sur la valeur de x_0 dont la variance $s_1(x_0)^2$ est donnée dans le cas d'une droite par la relation, avec f' la dérivée de f :

$$s_1(x_0)^2 = \frac{s(\hat{y}_0)^2}{(f'(x_0))^2} = \frac{s_l^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2} \right)}{(f'(x_0))^2} \quad \text{Eq. 4.55}$$

et dans le cas d'un polynôme de degré 2 par la relation :

$$s_1(x_0)^2 = \frac{s(\hat{y}_0)^2}{(f'(x_0))^2} = \frac{s_l^2 \left(\frac{1}{N} + A_{F5} \right)}{(f'(x_0))^2} \quad \text{Eq. 4.56}$$

avec

$$A_{F5} = \frac{A_{F1}(x_0 - \bar{x})^2 + A_{F2} \left(x_0^2 - \frac{\sum_i n_i x_i^2}{N} \right)^2 - 2A_{F3}(x_0 - \bar{x}) \left(x_0^2 - \frac{\sum_i n_i x_i^2}{N} \right)}{A_{F4}}$$

$$A_{F1} = \sum_i n_i \left(x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i^2 \right)^2$$

$$A_{F2} = \sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$A_{F3} = \sum_i n_i (x_i - \bar{x}) \left(x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i^2 \right)$$

$$A_{F4} = A_{F1} A_{F2} - A_{F3}^2$$

- l'incertitude de mesure sur y_0 : pour un seul mesurage, elle est estimée au moyen de la variance :

$$s(y_0)^2 = s_l^2 \quad \text{Eq. 4.57}$$

cette dernière étant supposée approximativement constante sur l'étendue de mesure (dans le cas contraire, des approches plus complexes avec pondération sont nécessaires). Si on utilise une valeur moyenne \bar{y}_0 obtenue à partir de n_0 mesurages, la variance correspondante est donnée par la relation :

$$s(\bar{y}_0)^2 = \frac{s_t^2}{n_0} \quad \text{Eq. 4.58}$$

Il en résulte une deuxième erreur sur la valeur de x_0 dont la variance $s_2(x_0)^2$ est donnée par la relation, avec f' la dérivée de f :

$$s_2(x_0)^2 = \frac{s(y_0)^2}{f'(x_0)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{s(\bar{y}_0)^2}{n_0 \cdot f'(x_0)^2} \quad \text{Eq. 4.59}$$

La variance totale $s(x_0)^2$ sur l'estimation x_0 est égale à la somme des deux variances précédentes :

$$s(x_0)^2 = s_1(x_0)^2 + s_2(x_0)^2 \quad \text{Eq. 4.60}$$

L'intervalle de confiance au niveau $(1-\alpha)$ sur la valeur vraie du mesurande est donné par la relation suivante, avec t la variable de Student et un nombre de degrés de liberté $\nu = N - 2$ pour une droite et $\nu = N - 3$ pour un polynôme de degré 2 :

$$[x_0 - s(x_0)t_{1-\alpha/2}(\nu); x_0 + s(x_0)t_{1-\alpha/2}(\nu)] \quad \text{Eq. 4.61}$$

Si les calculs précédents restent relativement simples dans le cas d'une droite, il deviennent vite très lourds pour un polynôme. Aussi est-il préférable dans ce cas d'utiliser des logiciels de calcul numérique ou les fonctions appropriées des tableurs si elles existent pour effectuer ces calculs.

L'écart type $s(x_0)$ obtenu peut ensuite être utilisé en le considérant comme l'incertitude type $u(x_0)$ pour les calculs d'incertitude présentés au chapitre 5.

4.6 VÉRIFICATION D'UN APPAREIL DE MESURE

La vérification d'un appareil de mesure est une opération similaire à l'étalonnage en ce qui concerne le mode opératoire, mais dont le résultat est de nature différente. En effet, il s'agit également de soumettre l'appareil à des mesurandes de valeurs connues x_i couvrant l'étendue de mesure et de noter les valeurs de sortie correspondantes y_i fournies par l'appareil. Si les valeurs observées y_{ik} ne s'écartent pas des valeurs attendues de plus d'une certaine quantité I_{mt} appelée incertitude maximale tolérée et définie par l'utilisateur, l'appareil est déclaré conforme et continue à être utilisé en l'état. Si au contraire une ou plusieurs valeurs y_{ik} s'écartent des valeurs attendues avec un écart supérieur à I_{mt} , l'appareil est déclaré non conforme et doit subir un nouvel étalonnage complet, un nouveau réglage, voire une réparation ou un remplacement selon la gravité constatée des dysfonctionnements. L'opération de vérification est illustrée graphiquement Figure 4.8 et Figure 4.9.

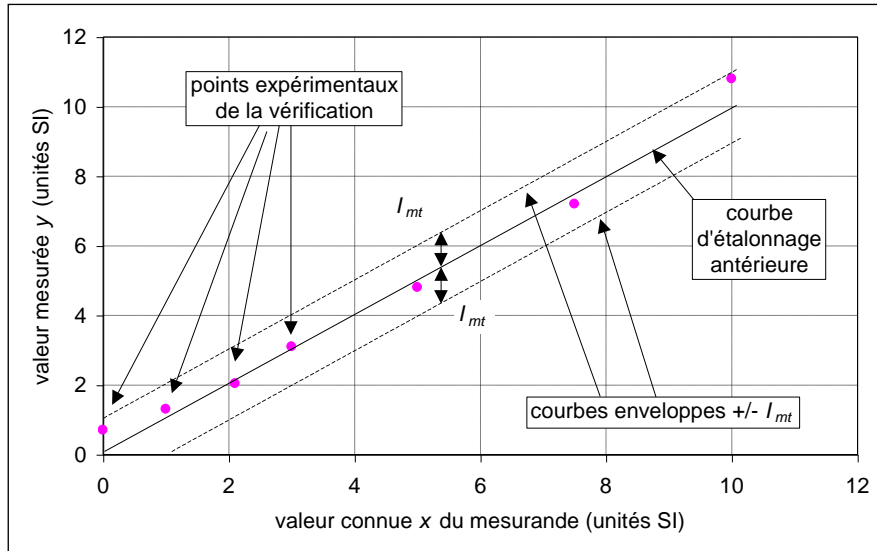


Figure 4.8 : exemple de vérification satisfaisante : tous les points expérimentaux se situent à une distance inférieure à I_{mt} de la valeur prévue

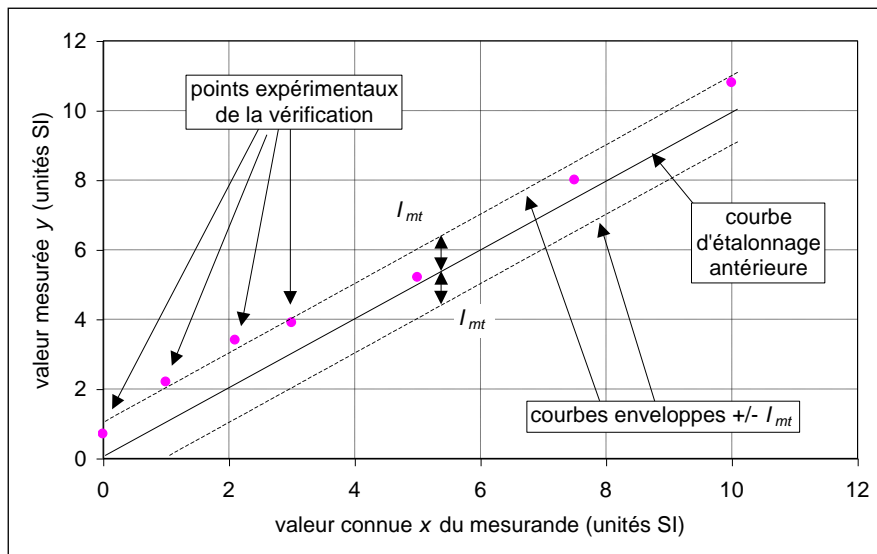


Figure 4.9 : exemple de vérification non satisfaisante : trois points expérimentaux aux abscisses 1, 2 et 3 se situent à une distance supérieure à I_{mt} de la valeur prévue

La vérification peut être conduite soit en laboratoire dans des conditions identiques à celles de l'étalonnage, soit sur le site de mesure si les conditions s'y prêtent et si elles ne sont pas trop différentes de celles du laboratoire, notamment en ce qui concerne les incertitudes de mesure et les grandeurs d'influence. La vérification sur site dans des

conditions satisfaisantes ne contraind pas à démonter l'appareil de mesure, ce qui constitue un avantage certain.

Les normes NF X 07-011 (1994) et NF X 07-016 (1993) fournissent des informations complémentaires utiles pour un service métrologique opérationnel. Comme pour l'étalonnage, la vérification doit faire l'objet de procédures écrites spécifiques pour chaque appareil de mesure (voir aussi chapitre 3).

4.7 EXEMPLES D'ETALONNAGE

4.7.1 Etalonnage d'un capteur piézorésistif

Le capteur étudié est un capteur piézorésistif à membrane céramique Al_2O_3 dont l'étendue de mesure est 0–2 m (voir chapitre 10). Après un réglage initial conforme aux spécifications du constructeur, l'étalonnage de l'appareil a été réalisé en laboratoire, en le fixant au pied d'une colonne d'étalonnage constituée d'un tube vertical en Plexiglas de 3,50 m de hauteur (Photo 4.1). La colonne est équipée d'un mètre certifié de classe II de 4 m de longueur, calé à une cote zéro de référence en pied de colonne. Les valeurs connues x_i de la hauteur d'eau dans la colonne sont lues sur le mètre certifié avec une incertitude inférieure à 0,5 mm.



Photo 4.1 : colonne d'étalonnage des capteurs de pression
(photo J.-L. Bertrand-Krajewski)

Cette valeur de l'incertitude en laboratoire est acceptable car elle est 10 à 20 fois plus faible que l'incertitude de mesure réelle in situ pour un mesurage de hauteur d'eau sur une section mouillée en collecteur d'assainissement par exemple.

On commence l'étalonnage avec une colonne vide que l'on remplit progressivement de 0 à 2 m, en $m = 5$ paliers correspondant respectivement à 20, 40, 60, 80 et 100 % de l'étendue de mesure. A chaque palier, on effectue successivement $n_i = 12$ lectures conjointes de la hauteur d'eau affichée par l'appareil et du courant sur la sortie analogique 4-20 mA, avec une lecture toutes les 30 secondes. Le mesurage conjoint du courant avec un multimètre de précision permet de vérifier que le signal transmis sur la boucle de courant 4-20 mA et renvoyé sur une centrale d'acquisition de données correspond à la valeur affichée par l'appareil et, le cas échéant, de procéder aux réglages nécessaires pour garantir cette correspondance. La relation linéaire entre l'intensité I_c en mA et la hauteur d'eau h en mm est :

$$h = 125 I_c - 500 \quad \text{Eq. 4.62}$$

On réitère l'ensemble de la procédure à la descente, en passant en 5 paliers de 100 % à 20 % de l'étendue de mesure, afin de pouvoir détecter d'éventuels phénomènes d'hystérésis du transducteur.

L'ensemble des données brutes relatives aux hauteurs d'eau mesurées est présenté Tableau 4.1. A titre d'information complémentaire, le document original décrivant la procédure d'étalonnage est reproduit Figure 4.10.

Capteur Milltronics NivuBar Plus n° 839 NBP 1083														
Enregistreur Milltronics 839 OGH 03														
Etalonnage réalisé le 15/06/1999 (CM, AJR, MM, JLBK)														
X_i	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{i3}	Y_{i4}	Y_{i5}	Y_{i6}	Y_{i7}	Y_{i8}	Y_{i9}	Y_{i10}	Y_{i11}	Y_{i12}	$Y_{i\text{moyen}}$	S_i
399	399	400	400	400	400	400	400	399	399	399	399	399	399,50	0,5222
799	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800,00	0,0000
1200	1201	1201	1202	1202	1202	1202	1201	1201	1201	1201	1201	1201	1201,33	0,4924
1600	1601	1601	1601	1601	1601	1602	1600	1600	1600	1600	1600	1600	1600,58	0,6686
2000	2002	2002	2002	2002	2002	2002	2001	2001	2001	2001	2001	2001	2001,50	0,5222
2001	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	1999	2000	2000	2000	2000	1999,92	0,2887
1600	1600	1600	1600	1599	1600	1600	1600	1600	1600	1599	1600	1599	1599,75	0,4523
1200	1202	1202	1202	1201	1202	1202	1201	1201	1201	1201	1202	1201	1201,50	0,5222
800	801	801	801	801	800	801	801	801	801	801	801	801	800,92	0,2887
400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400,00	0,0000

Tableau 4.1 : données brutes de l'étalonnage d'un capteur piézorésistif

OTHU – INSA de Lyon, URGC – Hydrologie Urbaine
**Procédure d'étalonnage des piézomètres Milltronics NivuBar Plus
avec transmetteur OCMD 00NT20W10E**

Matériel nécessaire :

- 1 colonne d'étalonnage avec mètre étalon certifié de classe II (dalle URGC)
- 1 multimètre et fils accessoires (salle Othu)
- 2 résistances ohmiques de 300Ω (salle Othu)
- 1 pompe de vidange ($3,6 \text{ m}^3/\text{h}$) (salle Othu)

Durée totale (approximative) :

3 heures au laboratoire

Réalisation :

- A faire avant mise sur site,
- puis tous les 6 mois,
- et en cas de non conformité de la vérification.

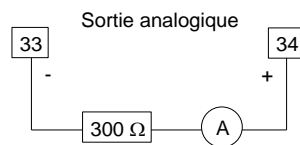
Précautions générales :

- Toujours effectuer les étalonnages sur une sonde préalablement nettoyée.
- Les autres précautions énoncées dans les procédures de nettoyage et de vérification restent valables.

Protocole opératoire :

Branchements du transmetteur :

- Oter le capot en face avant du transmetteur.
- Brancher l'alimentation triphasée 220 V sur les bornes L1, N et PE (terre).
- Branchements du capteur de hauteur :
 - fil rouge sur la borne 1+.
 - fil bleu sur la borne 3+.
- Relier par un fil $1,5 \text{ mm}^2$ les bornes 2 et 4.
- La sortie de courant 4-20 mA entre les bornes 33 et 34 va être configurée pour coder la hauteur d'eau mesurée par le capteur. Pour pouvoir procéder au mesurage de ce courant, il faut réaliser le circuit suivant en insérant la résistance et l'ampèremètre :



- Refermer le boîtier et alimenter le transmetteur.

Figure 4.10 : exemple de procédure d'étalonnage d'un capteur piézométrique (début)

Configuration du transmetteur :

- Accéder au paramètre **18**, selon la méthode décrite dans la procédure de vérification.
- Entrer le code **8172** de remise à zéro générale.
- Accéder au paramètre **21** (**ALT DISP** ⇒ **21** ⇒ **ENTER**).
- Entrer le code **0** pour avoir l'affichage de la hauteur d'eau lors des mesures.
- Accéder au paramètre **24** et entrer le code **1** (mesure en mètre).
- Accéder au paramètre **36** et entrer le code **1** (activation de la sortie courant).
- Accéder au paramètre **37** et entrer le code **0** (choix de la hauteur).
- Accéder au paramètre **38** et entrer le code **1** (choix de la gamme 4-20 mA en sortie).
- Accéder au paramètre **40** et entrer la valeur **2.0** (étendue de mesure en sortie).
- Accéder au paramètre **82** et entrer le code **1** (choix de la gamme 4-20 mA).
- Accéder au paramètre **83** et entrer la valeur **2.0** (étendue de mesure du capteur).
- Régler l'offset à **0.02** m selon la méthode décrite dans la procédure de vérification.

Protocole de mesure :

- Monter le capteur dans la colonne, en s'assurant que :
 - le capteur est vertical.
 - le capteur touche le fond de la colonne (calage du zéro).
- Réalisation d'un point de mesure :
 - Remplir la colonne d'eau à la hauteur voulue en ouvrant la vanne d'alimentation et noter la hauteur réelle x_i lue sur le mètre certifié après stabilisation du niveau d'eau dans la colonne.
 - Attendre la stabilisation de la valeur affichée par l'appareil (1 min).
- Noter la hauteur y_{ik} affichée sur le transmetteur et le courant I_c i_k mesuré par l'ampèremètre.
- Faire au total douze ($k = 1$ à 12) mesurages (à 30 s d'intervalle environ) pour cette hauteur d'eau.

Pour ce capteur d'étendue de mesure 0-2 m, on réalise $m = 5$ (i de 1 à 5) points de mesure pour les hauteurs d'eau $x_i = 0,4$ m, 0,8 m, 1,2 m, 1,6 m et 2,0 m. On effectue ces mesurages d'abord dans le sens croissant (remplissage de la colonne), puis dans le sens décroissant de 2,0 m à 0,4 m (vidange de la colonne avec la pompe). Au total, on effectue donc deux fois 60 mesurages.

Références :

- Manuel d'instructions du transmetteur OCMD : PRR 5.04 (avril 1998).
- Descriptif technique du capteur NivuBar Plus : 660T971.01.
- Rapport OTHU « Procédures capteurs » (1999)

Figure 4.10 : exemple de procédure d'étalonnage d'un capteur piézométrique (fin)

Le détail des calculs est présenté pour la phase « montée en pression ». Le graphique des écarts type s_i en Figure 4.11 montre que l'on peut, en première approximation, les considérer comme constants autour de 0,55 mm en faisant abstraction de la valeur nulle pour $x_i = 800$ mm (et 0,44 mm en tenant compte de toutes les valeurs) et donc admettre que la variance est constante sur l'étendue de mesure ou, tout au moins, que ses variations peuvent être considérées comme négligeables.

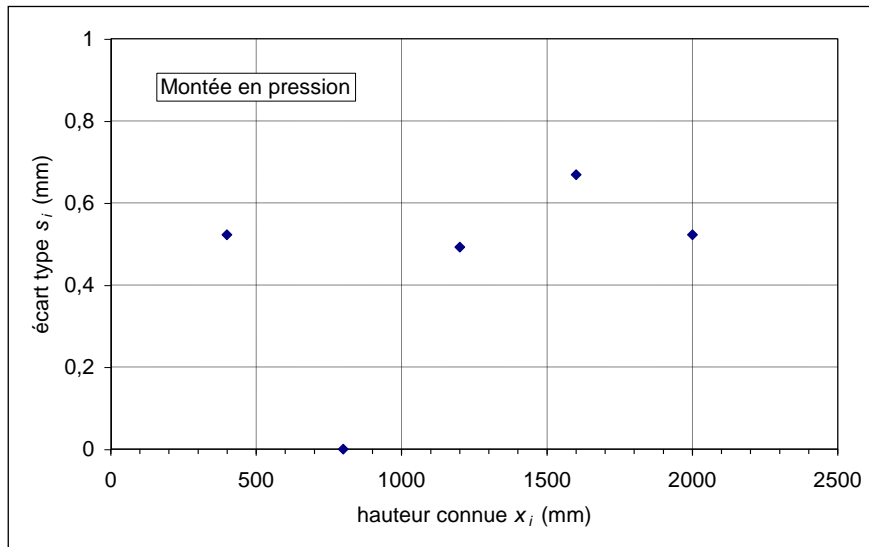


Figure 4.11 : variation de s_i sur l'étendue de mesure à la montée en pression

Détermination d'une droite d'étalonnage

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer l'ensemble des relations données au paragraphe 4.4.2 pour déterminer la droite d'étalonnage. En utilisant le logiciel d'ajustement numérique Table Curve 2D[®] (ou l'utilitaire d'analyse Régression Linéaire dans Excel[®]) nous obtenons directement l'ensemble des résultats indiqué Tableau 4.2 et Figure 4.12.

L'intervalle de confiance pour a indique, avec une probabilité de 95 %, que la constante a est non nulle. L'ordonnée à l'origine est donc bien différente de zéro et il est nécessaire d'en tenir compte pour corriger les résultats de mesure. On peut également établir directement ce résultat en testant l'hypothèse H_0 ($a = 0$) :

$$\text{on a d'une part } \frac{|a|}{s_a} = \frac{0,508854}{0,177522} = 2,8664$$

et d'autre part, en lisant la table de Student (Annexe 3) ou en utilisant la fonction Excel[®],

$$t_{1-\alpha/2}(N-2) = t_{0,975}(58) = \text{LOI.STUDENT.INVERSE}(0,05 ; 58) = 2,0017 < 2,8644.$$

Grandeur	Valeur	Intervalle de confiance à 95 %	Ecart type s
N	60		
\bar{x}	1199,600		
\bar{y}	1200,583		
a	0,508854	0,153557 – 0,864150	0,177522
b	1,000395	1,000128 – 1,000663	0,000134
$\Sigma \varepsilon_i^2$	19,97508		
s_l^2	0,344398		

Tableau 4.2 : résultats numériques du calcul de la droite d'étalonnage du capteur piézométrique à la montée en pression

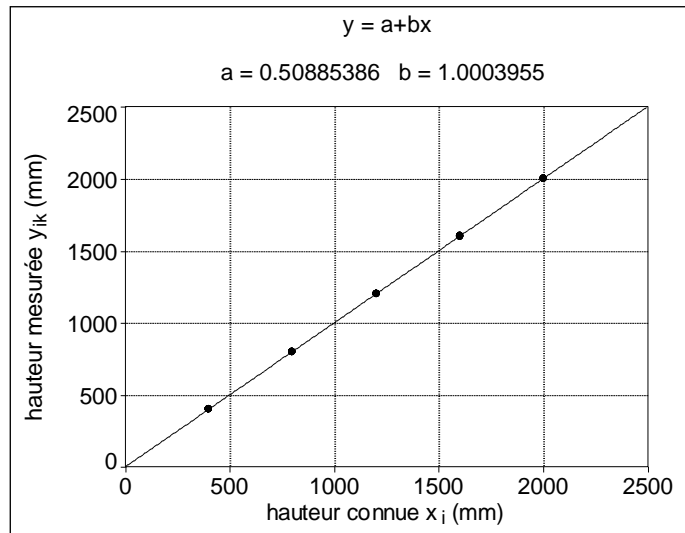


Figure 4.12 : droite d'étalonnage du capteur piézométrique à la montée en pression

On a donc bien rejet de l'hypothèse H_0 avec un risque de refuser à tort de 5 %. Un étalonnage spécifique de l'appareil pour les hauteurs d'eau inférieures à 20 cm a confirmé ces résultats.

De même, l'intervalle de confiance pour b indique, avec une probabilité de 95 %, que la pente b est supérieure à 1. On peut également établir directement ce résultat en testant l'hypothèse $H_0 (b = 1)$:

$$\text{on a d'une part } \frac{|b-1|}{s_b} = \frac{0,000395}{0,000134} = 2,9478$$

et d'autre part, en lisant la table de Student (Annexe 3) ou en utilisant la fonction Excel®,

$$t_{1-\alpha/2}(N-2) = t_{0,975}(58) = \text{LOI.STUDENT.INVERSE}(0,05 ; 58) = 2,0017 < 2,9478.$$

On a donc bien rejet de l'hypothèse H_0 avec un risque de refuser à tort de 5 %.

Détermination d'une courbe d'étalonnage

Afin de voir si la relation d'étalonnage linéaire est satisfaisante, on peut comparer les résultats obtenus lorsqu'on ajuste un polynôme de degré 2. Le système à résoudre s'écrit :

$$[M_1][M_2] = [M_3] \quad \text{Eq. 4.63}$$

$$\text{avec } M_1 = \begin{bmatrix} 60 & 71976 & 105571224 \\ 71976 & 105571224 & 172771243176 \\ 105571224 & 172771243176 & 300721209542424 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 72035 \\ 105649606 \\ 172892819194 \end{bmatrix} \quad (\text{attention, les termes des matrices ne doivent pas être arrondis}).$$

On peut résoudre ce système manuellement ou avec la fonction Excel[®] suivante :

$$M_2 = \text{PRODUITMAT}(\text{INVERSEMAT}(M_1); M_3) = \begin{bmatrix} 0,384125 \\ 1,000663 \\ -1.11545.10^{-7} \end{bmatrix}$$

En utilisant le logiciel d'ajustement numérique Table Curve 2D[®] (ou en utilisant dans l'utilitaire d'analyse Excel[®] l'outil Régression Linéaire en introduisant comme deuxième variable explicative le carré des valeurs x_i), nous obtenons directement l'ensemble des résultats indiqué Tableau 4.3 et Figure 4.13.

Grandeur	Valeur	Intervalle de confiance à 95 %	Ecart type s
N	60		
\bar{x}	1199,600		
\bar{y}	1200,583		
a	0,384125	-0,347073 – 1,115322	0,365203
b	1,000663	0,999269 – 1,002057	0,000696
c	-1,1154.10 ⁻⁷	-6,8169.10 ⁻⁷ – 4,5859.10 ⁻⁷	2,8476.10 ⁻⁷
$\sum \varepsilon_i^2$	19,92145		
sl_{poly2^2}	0,349499		

Tableau 4.3 : résultats numériques du calcul du polynôme de degré 2 d'étalonnage du capteur piézométrique à la montée en pression

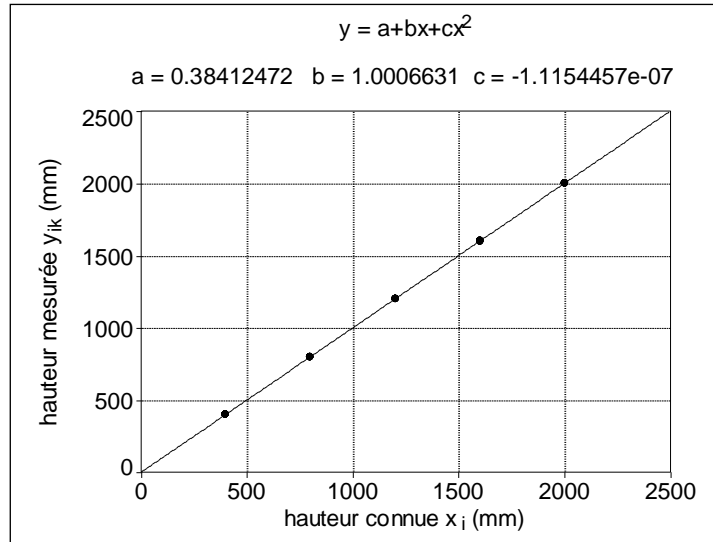


Figure 4.13 : parabole d'étalonnage du capteur piézométrique à la montée en pression

Par rapport à la droite, on observe que la valeur de a n'est pas significativement différente de zéro et peut être considérée comme nulle avec un niveau de confiance de 95 %. La somme des carrés des résidus est légèrement plus faible que dans l'ajustement linéaire.

Le rapport

$$F = (N-3) \frac{((N-2)s_l^2 - (N-3)s_{lpol}^2)}{(N-3)s_{lpol}^2} = 57 \frac{(19,97508 - 19,92145)}{19,92145} = 0,1534$$

est inférieur à la valeur F pour un risque $\alpha = 0,05$ lue dans la table de Snedecor (Annexe 4) ou calculée avec Excel® :

$$F_{0,95}(1 ; 57) = \text{INVERSE.LOIF}(0,05 ; 1 ; 57) = 4,0099.$$

On peut donc admettre que la droite d'étalonnage est satisfaisante.

Des calculs similaires sont effectués pour l'étalonnage à la descente en pression (voir Tableau 4.4).

Les résultats finaux sont les suivants :

- droite d'étalonnage à la montée : $y = 0,508854 + 1,000395 x = a_m + b_m x$
- droite d'étalonnage à la descente : $y = 1,216808 + 0,999167 x = a_d + b_d x$

On constate que les deux droites ne sont pas identiques et donc que le capteur ne réagit pas de manière identique à la montée et à la descente en pression. Cela peut poser des problèmes pour passer de la valeur mesurée à la valeur vraie du mesurande si les écarts entre les deux droites s'avèrent trop importants.

Grandeur	Valeur	Intervalle de confiance à 95 %	Ecart type s
N	60		
\bar{x}	1200,200		
\bar{y}	1200,417		
a	1,216808	0,696184 – 1,737432	0,260126
b	0,999167	0,998774 – 0,999559	0,000196
$\Sigma \varepsilon_i^2$	42,83734		
s_l^2	0,738574		

Tableau 4.4 : résultats numériques du calcul de la droite d'étalonnage du capteur piézométrique à la descente en pression

Nous allons donc vérifier que ces deux droites sont significativement différentes d'un point de vue statistique, en utilisant les méthodes de comparaison des droites présentées au paragraphe 4.4.3. Si ce n'est pas le cas, nous pourrions utiliser une seule des deux droites pour traiter les résultats de mesure.

Pour procéder à cette comparaison, il faut préalablement vérifier que leurs variances liées ne sont pas différentes au moyen du test de Snedecor appliqué au rapport des deux variances.

Nous utiliserons dans la suite l'indice m pour les valeurs relatives à la montée, et l'indice d pour les valeurs relatives à la descente. Nous avons $N = N_m = N_d = 60$,

$$\text{et } F = \frac{s_{lm}^2}{s_{ld}^2} = \frac{0,344398}{0,738574} = 0,4663.$$

En prenant un risque $\alpha = 0,01$

on a $F_{inf} = 1/[INVERSE.LOIF(0,01 ; 58 ; 58)] = 1/1,8559 = 0,5388$

et $F_{sup} = INVERSE.LOIF(0,01 ; 58 ; 58) = 1,8559$.

F n'étant pas compris dans l'intervalle $[F_{inf} ; F_{sup}]$, les variances liées des deux droites sont considérées comme différentes avec un risque de 1 % de se tromper.

Les variances liées étant significativement différentes, on utilise le test de Welch. On obtient :

$$t = \frac{1,000395 - 0,999167}{\sqrt{0,000134^2 + 0,000196^2}} = 5,1721$$

$$\text{et } \nu = \frac{(0,000134^2 + 0,000196^2)^2}{\frac{0,000134^4}{58} + \frac{0,000196^4}{58}} = 102,49 \approx 102$$

Or, en prenant un risque $\alpha = 0,01$

on a $t_{1-\alpha/2}(102) = \text{LOI.STUDENT.INVERSE}(0,01 ; 102) = 2,6249 < 5,1721$.

On peut donc admettre que les deux pentes sont différentes, avec un risque de 1 % de se tromper. Nous pouvons également obtenir ce résultat, bien qu'avec un niveau de confiance légèrement inférieur, en comparant les intervalles de confiance à 95 % des deux pentes b_m et b_d : comme les deux intervalles $[1,000128 ; 1,000663]$ et $[0,998774 ; 0,999559]$ sont disjoints, on peut conclure directement que les deux pentes sont significativement différentes.

Finalement, les deux droites d'étalonnage sont bien différentes avec un niveau de confiance de 99 %, et ne peuvent donc pas être confondues.

Cela nous conduirait logiquement à tenir compte différemment des périodes où la hauteur d'eau augmente et diminue dans l'étude des valeurs brutes fournies par l'appareil de mesure, ce qui constitue un problème complexe dans lequel la dynamique de la réponse du capteur devrait être prise en compte. Aussi allons-nous utiliser, à ce stade des calculs, une approche pragmatique, en analysant les écarts fournis par les deux droites d'étalonnage.

Pour une valeur mesurée y , les deux droites conduisent à deux valeurs x_m et x_d différentes. La différence $x_m - x_d$ est représentée Figure 4.14.

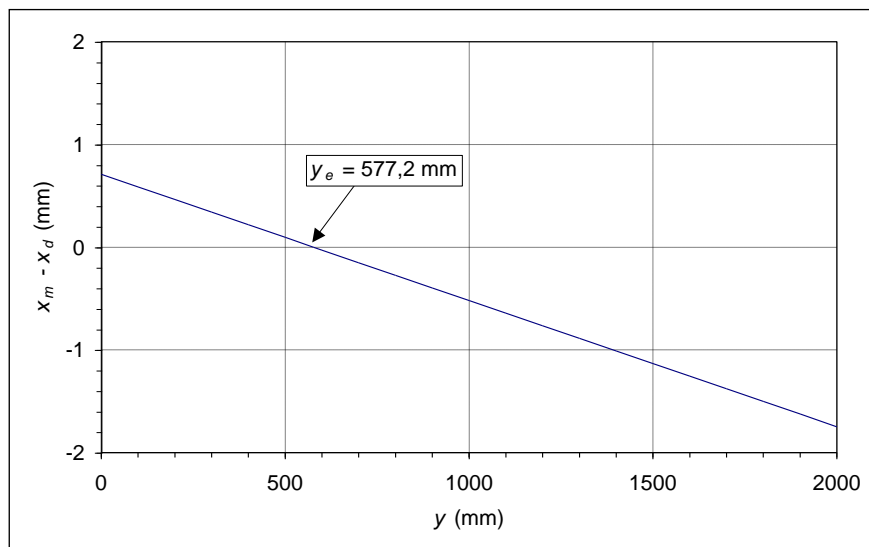


Figure 4.14 : différence $x_m - x_d$ en fonction de la hauteur mesurée y

On observe que l'écart maximal sur l'étendue de mesure 0–2000 mm est inférieur à 2 mm en valeur absolue. Cet écart est positif pour les valeurs de y inférieures à $y_e = 577,2$ mm et négatif au-delà. Si donc on utilise une seule droite d'étalonnage, l'erreur sur la valeur vraie x sera toujours inférieure à 2 mm, sous réserve que les conditions de fonctionnement du capteur in situ et en régime dynamique (hauteurs fluctuantes et non stabilisées lors des mesurages) soit assimilables aux conditions de fonctionnement en laboratoire lors de l'étalonnage (hauteurs non fluctuantes toujours

croissantes ou décroissantes et stabilisées lors du mesurage). Dans le cas étudié ici, nous avons choisi de travailler avec la droite d'étalonnage à la montée en pression.

Pour conclure cet exemple, nous pouvons déterminer l'intervalle de confiance à 95 % sur les estimations x_0 de la valeur vraie du mesurande obtenues à partir des valeurs mesurées y_0 , et ceci pour toute l'étendue de mesure. A titre d'exemple, pour un mesurage unique $y_0 = 600$ mm, on obtient $x_0 = 599,254$ mm et, en prenant $s_i^2 = s_l^2$, la variance vaut :

$$s(x_0)^2 = \frac{s_l^2}{b^2} \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2} \right) = \frac{0,344397}{(1,000395)^2} \left(\frac{61}{60} + \frac{360415,17}{19228814,4} \right) = 0,3564$$

et donc $s(x_0) = 0,5970$ mm.

Finalement, l'intervalle de confiance à 95 % contenant la valeur vraie du mesurande, avec $t_{1-\alpha/2}(58) = 2,0017$ est donné par :

$$[x_0 - 2,0017 \times 0,5970 ; x_0 + 2,0017 \times 0,5970] = [598,06 ; 600,45].$$

La valeur vraie du mesurande a une probabilité de 95 % de se trouver dans un intervalle centré sur 599,2 mm et de largeur 2,4 mm.

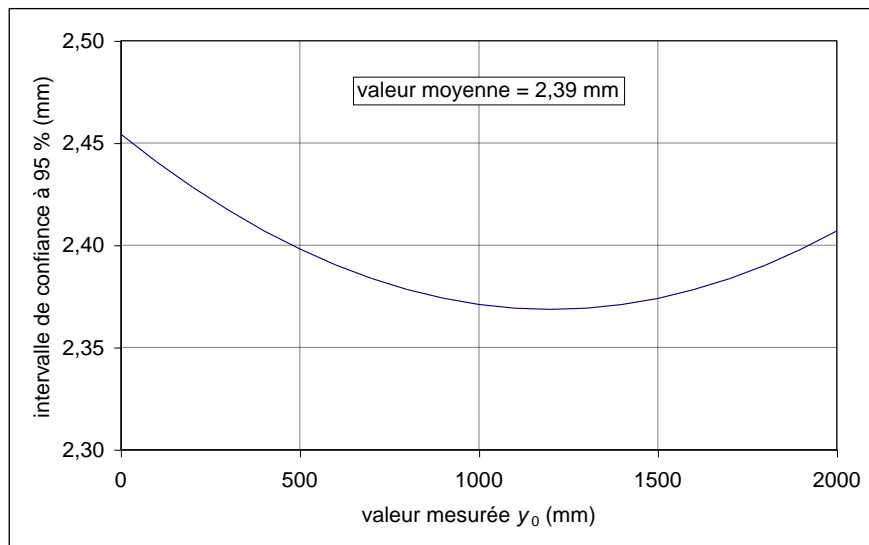


Figure 4.15 : largeur de l'intervalle de confiance à 95 % pour l'ensemble de l'étendue de mesure

Exprimé sous forme d'incertitude de mesure comme nous le verrons au chapitre 5, on peut écrire :

$$x_0 = 599,2 \pm 1,2 \text{ mm.}$$

L'intervalle de confiance calculé pour l'ensemble de l'étendue de mesure est indiqué Figure 4.15. On constate bien que l'intervalle de confiance est minimum pour des valeurs voisines de $\bar{y}_{ik} = 1200$ mm, et que sa valeur augmente vers les extrémités de l'étendue de mesure. Cependant, cette variation reste faible et en pratique on prendra comme valeur unique 2,4 mm, ce qui correspond à un écart type $s(x_0)$ arrondi à 0,6 mm.

4.7.2 Etalonnage d'un pH-mètre

Cet exemple montre les résultats d'étalonnage d'un pH-mètre à électrode de mesure en verre et électrode de référence en platine/titane, destiné à la mesure en continu du pH sur un réseau d'assainissement. Son étendue de mesure est 2–12 pH et il est corrigé en température (Photo 4.2).



Photo 4.2 : capteur et transmetteur du pH-mètre Yokogawa FU 20 dont l'étalonnage est décrit dans le texte (photo Service Audiovisuel INSA de Lyon)

L'appareil a été étalonné avec des solutions étalons certifiées pour les 3 valeurs de pH 4, 7 et 10 qui correspondent à la gamme des valeurs normalement observables sur le site de mesure (des valeurs inférieures à 4 et supérieures à 10 sont a priori exceptionnelles et correspondent généralement à des événements particuliers tels que des déversements accidentels ou des rejets de type industriel non autorisés). L'étalonnage est donc conçu en vue d'une utilisation de la courbe d'étalonnage entre pH = 4 et pH = 10.

Les solutions étalons, certifiées avec une procédure type NIST (US National Institute of Standards and Technology Buffers), possèdent un certificat d'étalonnage individuel. Elles présentent une erreur inférieure à 0,01 unité pH à 20°C. Un tableau indique la correction de la valeur étalon en fonction de la température (voir Figure 4.16).

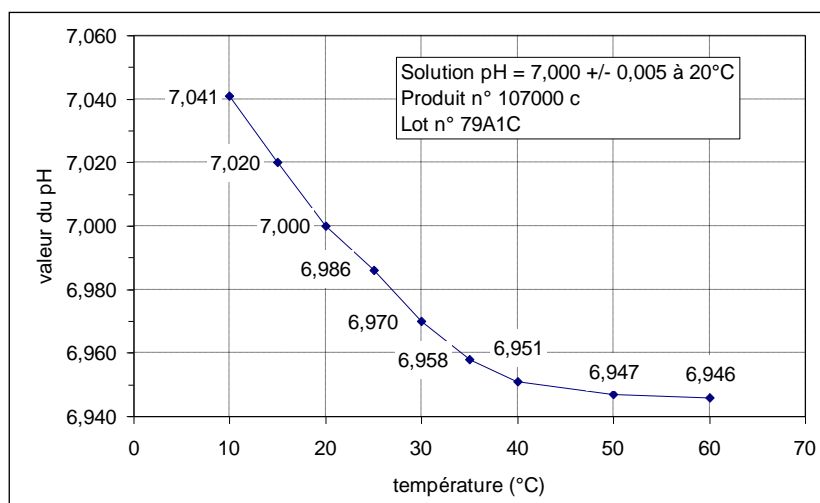


Figure 4.16 : valeur de la solution étalon pH = 7,000 en fonction de la température

Sonde pH Yokogawa FU 20.05.T2.NPT n° K6 495		
Convertisseur Yokogawa pH 402G.E.2.F.ISCT n° KY12 0061		
Étalonnage réalisé le 26/05/1999 (CM, AJR, MM, JLBK)		
Paramètre	Valeur	Intervalle de confiance à 95 %
Polynôme de degré 1 : $y = a + bx$		
a	0,099277	0,089120 – 0,109435
b	0,979210	0,977836 – 0,980585
$\sum \varepsilon_i^2$	0,0032839695	
s_f^2	$9,658734 \cdot 10^{-5}$	
Polynôme de degré 2 : $y = a + bx + cx^2$		
a	0,024808	0,000977 – 0,048638
b	1,003499	0,995990 – 1,011009
c	-0,001742	-0,002276 – 0,001207
$\sum \varepsilon_i^2$	0,0014083333	
s_f^2	$4,267677 \cdot 10^{-5}$	
Polynôme de degré 3 : $y = a + bx + cx^2 + dx^3$		
a	1,627645	non déterminé
b	0,213234	non déterminé
c	0,118722	non déterminé
d	-0,005753	non déterminé
$\sum \varepsilon_i^2$	0,0014083333	
s_f^2	$4,401042 \cdot 10^{-5}$	

Tableau 4.5 : étalonnage du pH-mètre par trois polynômes de degré 1 à 3

La procédure d'étalonnage est assez simple. Elle est décrite en détail dans un document spécifique analogue à celui du piézomètre du paragraphe précédent. Après dégraissage et nettoyage soigné à l'eau déminéralisée, la sonde pH est plongée dans la solution étalon à pH = 4,000. Après stabilisation de la valeur mesurée pendant 1 minute, on procède à la lecture :

- de la température de la solution étalon avec un thermomètre étalonné certifié Quick 74847 de précision 0,2°C ;
- de la température indiquée par la sonde pH pour sa correction interne ;
- de la valeur du pH affichée par l'appareil de mesure ;
- de l'intensité 4-20 mA sur les sorties pH et température de l'appareil de mesure.

Ces lectures sont réalisées 12 fois de suite pour chaque solution étalon de pH 4, 7 et 10 ($N = 36$), en tenant compte de la température de la solution pour corriger la valeur théorique de la solution pH étalon (la température est une grandeur d'influence) et vérifier que la correction interne du capteur est correcte.

Nous avons ajusté des polynômes de degré 1 à 3. Les résultats principaux des calculs sont indiqués dans le Tableau 4.5. On constate que le polynôme de degré 3 n'apporte aucune amélioration : la somme des carrés des résidus est identique à celle obtenue avec le polynôme de degré 2. Par contre, cette somme est significativement réduite en passant de la droite au polynôme de degré 2.

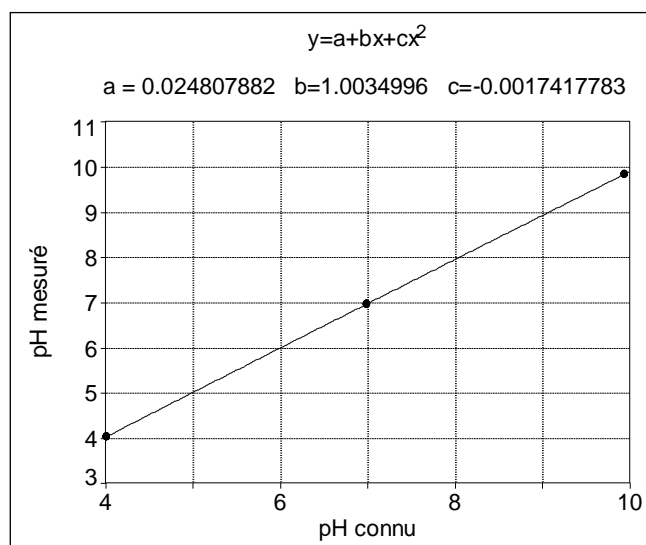


Figure 4.17 : courbe d'étalonnage du pH-mètre

Le rapport

$$F = (N - 3) \frac{((N - 2)s_l^2 - (N - 3)s_{lpol2}^2)}{(N - 3)s_{lpol2}^2} \approx 33 \frac{(0,00328397 - 0,00140833)}{0,00140833} \approx 43,95$$

est supérieur à la valeur F pour un risque $\alpha = 0,05$ lue dans la table de Snedecor (Annexe 4) ou calculée avec Excel® :

$$F_{0,95}(1 ; 33) = \text{INVERSE.LOI.F}(0,05 ; 1 ; 33) = 4,139.$$

On adoptera donc le polynôme de degré 2 comme courbe d'étalonnage. Cette courbe est représentée Figure 4.17.

5. EVALUATION DES INCERTITUDES DE MESURE

L'évolution du concept d'incertitude de mesure

1^{ère} étape : quantification de l'erreur probable, c'est l'époque du « calcul d'erreur », on calcule des erreurs maximales que l'on combine linéairement.

2^{ème} étape : estimation caractérisant l'étendue des valeurs dans laquelle se situe la valeur vraie (norme de 1984).

3^{ème} étape : paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande (norme de 1993).

[...] On remarquera que ces trois définitions ne sont pas équivalentes, la dernière définition fait preuve d'humilité et de réalisme, elle ne présume pas de notre possibilité de connaître puis de compenser toutes les erreurs. Si l'on est sûr d'avoir corrigé toutes les erreurs, les trois définitions sont équivalentes.

M. Priel, *in* Barbier *et al.* (1996), p. 152-153

5.1 INTRODUCTION

Ce chapitre consacré à l'évaluation des incertitudes de mesure constitue un complément et un approfondissement des notions générales présentées au chapitre 3 « Démarche métrologique ». Il indique les détails théoriques et pratiques pour évaluer des incertitudes de mesure, en présentant les méthodes utilisables et en fournissant des exemples d'application.

Certains des termes spécifiques utilisés dans ce chapitre sont définis au fil du texte ; pour les autres, nous renvoyons le lecteur au lexique en fin d'ouvrage. Enfin, dans tout ce chapitre, on considère les grandeurs faisant l'objet de mesurages comme des variables aléatoires. Aussi les deux dénominations seront-elles utilisées conjointement en fonction du contexte.

5.2 VALEUR VRAIE, ERREURS ALEATOIRES ET ERREURS SYSTEMATIQUES

« L'incertitude de mesure est un paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande » (norme XP X 07-020, 1996). Aussi l'expression d'une grandeur physique doit-elle toujours comprendre trois éléments indissociables (Barbier *et al.*, 1996) :

- une valeur numérique ;
- une unité (choisie dans le système SI) ;

- une incertitude, qui caractérise la dispersion des valeurs mesurées autour de la meilleure estimation de la valeur vraie.

Tout l'art du métrologue consiste à évaluer ces incertitudes, à les ramener à une valeur compatible avec les exigences spécifiées et à garantir tout au long de la durée de mesure que cette valeur n'est jamais dépassée, par la programmation d'opérations d'étalonnages ou de vérifications périodiques.

La valeur vraie d'une grandeur est impossible à mesurer car il existe toujours des sources d'erreur affectant le mesurage et donc le résultat de mesure, qu'elles soient systématiques ou aléatoires. Le VIM (Vocabulaire International de Métrologie) donne les définitions suivantes de ces sources d'erreur (NF X 07-001, 1994) :

- **Erreur aléatoire** : résultat d'un mesurage moins la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité. On note que, comme on ne peut faire qu'un nombre fini de mesurages, il est seulement possible de déterminer une estimation de l'erreur aléatoire ;
- **Erreur systématique** : moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité, moins la valeur vraie du mesurande. Comme la valeur vraie, l'erreur systématique et ses causes ne peuvent pas être connues complètement.

Il est possible de réduire d'une part les erreurs aléatoires en répétant les mesurages, et d'autre part les erreurs systématiques en appliquant des corrections et en se raccordant à des étalons (voir chapitres 3 et 4).

5.2.1 Réduction des erreurs aléatoires

On considère une grandeur Y dont on a procédé au mesurage N fois de suite en garantissant les conditions de répétabilité. Ces N valeurs, notées y_i avec i de 1 à N , constituent un échantillon, que l'on suppose représentatif, de la population mère constituée par un nombre infini de mesurages de la même grandeur Y , cette grandeur étant considérée comme une variable aléatoire. Cette population peut être décrite par deux paramètres :

- son espérance mathématique $E(Y)$;
- sa variance $V(Y)$ - à titre de rappel, notons que l'écart type $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$.

L'échantillon des N valeurs y_i nous permet de calculer les grandeurs \bar{y} et $s(Y)^2$, estimations respectives de $E(Y)$ et $V(Y)$:

$$E(Y) \approx \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad \text{Eq. 5.1}$$

$$V(Y) \approx s(Y)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad \text{Eq. 5.2}$$

La variance de la moyenne \bar{y} est calculée par la relation :

$$V(\bar{y}) = \frac{V(Y)}{N} \quad \text{Eq. 5.3}$$

Elle diminue avec le nombre N de mesurages. On observe donc bien une réduction de l'incertitude sur la valeur moyenne de la grandeur Y lorsque le nombre de mesurages augmente.

5.2.2 Réduction des erreurs systématiques

La réduction des erreurs systématiques est beaucoup plus difficile que celle des erreurs aléatoires et exige un soin particulier de la part du métrologue qui doit procéder à une analyse détaillée du processus de mesure et des causes d'erreur potentielles. Les principales sources d'erreur systématique sont, sans ordre hiérarchique :

- effet des grandeurs d'influence (influence de la pression, de la température, etc.), qu'il est possible de réduire en procédant à des corrections des valeurs brutes ;
- erreur de justesse de l'instrument de mesure ;
- perturbation du phénomène physique étudié due à la présence de l'instrument de mesure (discrétion de l'appareil de mesure) ;
- erreurs d'arrondissement ou de troncature des valeurs numériques ;
- erreurs dans un algorithme de traitement des résultats de mesure ;
- erreurs introduites par la méthode de mesure ou par les hypothèses simplificatrices utilisées ;
- erreurs dues au mode opératoire.

Afin de mettre en évidence d'éventuelles erreurs systématiques affectant la valeur d'une grandeur, il existe plusieurs possibilités complémentaires (Barbier *et al.*, 1996) :

- mesurage de la même grandeur avec un instrument différent ;
- mesurage de la même grandeur avec des méthodes de mesure différentes ;
- mesurage d'une grandeur connue ou d'un étalon ;
- mesurage de la même grandeur en faisant varier de manière contrôlée les conditions d'environnement (mise en évidence des grandeurs d'influence telles que la pression, la température, etc.) ;
- mesurage de la même grandeur par des opérateurs ou des laboratoires différents.

Les corrections effectuées sur la valeur brute d'un résultat de mesure peuvent être classées en trois catégories :

- les corrections d'étalonnage (voir chapitre 4) ;
- les corrections d'environnement, destinées à compenser l'effet des grandeurs d'influence (par exemple, correction de température pour les valeurs du pH, de la conductivité, de la concentration en oxygène dissous, etc.) ;
- les corrections pour ramener les résultats à des conditions standards (de température, de pression, ou toute autre condition normalisée).

5.3 METHODES D'ESTIMATION DES INCERTITUDES

En général, la valeur y d'une grandeur Y est déterminée à partir des n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$ d'autres grandeurs ou termes correctifs $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n$ par une relation du type :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n) \quad \text{Eq. 5.4}$$

avec y valeur brute du mesurande ;
 f relation fonctionnelle qui contient chaque grandeur, **y compris les facteurs éventuels de correction** ;
 $x_1 \dots x_n$ valeurs des n grandeurs mesurées X_k .

Chaque valeur x_k est affectée d'une incertitude, appelée incertitude type et notée $u(X_k)$, correspondant à l'écart type $s(X_k)$ de la distribution de la variable aléatoire X_k . De même, on note $u(Y)$ l'incertitude type sur la valeur y .

Pour estimer la valeur de l'incertitude type $u(Y)$, trois méthodes peuvent être employées :

- la première, dite de type A, est entièrement expérimentale car fondée sur l'analyse statistique de séries de mesurages répétés de la grandeur Y ;
- la deuxième, dite de type B, est fondée sur l'analyse du principe de mesure de la grandeur Y , de son modèle mathématique, des grandeurs d'influence, des informations disponibles au sujet de la variabilité possible due aux différentes sources d'incertitude et à leur influence sur le mesurage réalisé ;
- la troisième, fondée sur l'analyse statistique de résultats de simulation du processus de mesure de la grandeur Y par la méthode de Monte-Carlo, permet de traiter certains problèmes dans lesquels les calculs permettant de passer des valeurs x_k à la valeur y sont complexes.

Les deux premières méthodes sont décrites dans la norme XP X 07-020 (1996).

5.3.1 Méthode de type A

La méthode de type A par mesurages répétés est simple dans son principe, mais fastidieuse dans sa réalisation. Elle consiste à procéder à N mesurages successifs de la même grandeur Y en enregistrant les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_N$ (en général $N \geq 30$). Ces mesurages doivent être réalisés dans un premier temps sans faire varier les conditions de mesure (test de répétabilité) puis dans un deuxième temps en faisant varier les conditions de mesure en suivant les contributions liées aux 5 M décrits au chapitre 3

(test de reproductibilité). Chaque série de valeurs est ensuite soumise à une analyse statistique pour déterminer la valeur moyenne \bar{y} et l'écart type $s(Y)$.

On considère que la variable Y suit une loi normale, également appelée loi de Laplace-Gauss. A titre d'illustration, la Figure 5.1 montre la distribution de probabilité suivant une loi normale d'une variable Y telle que la valeur moyenne $\bar{y} = 50$ et l'écart type $s(Y) = 10$, obtenue à partir d'un échantillon de taille $N = 100$.

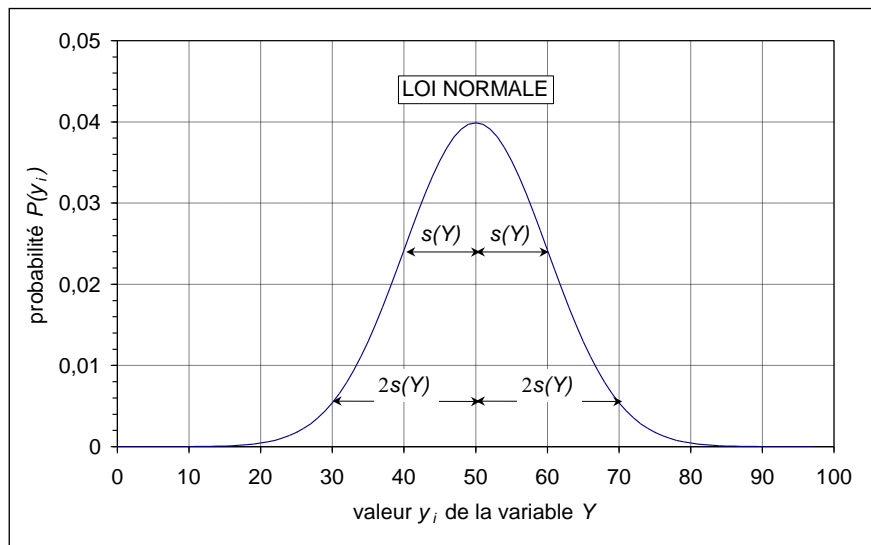


Figure 5.1 : exemple de distribution normale des valeurs y_i d'une variable Y , avec 100 valeurs, moyenne 50, écart type 10

On peut construire différents intervalles centrés sur la valeur moyenne \bar{y} et de largeur égale à $2k_e s(Y)$, avec k_e un facteur multiplicatif. On constate alors que :

- pour $k_e = 1$:
l'intervalle $[\bar{y} - s(Y), \bar{y} + s(Y)] = [40 ; 60]$ centré sur la valeur moyenne 50 contient 68,3 % des valeurs y_i ;
- pour $k_e = 1,96$:
l'intervalle $[\bar{y} - 1,96s(Y), \bar{y} + 1,96s(Y)] = [30,4 ; 69,6]$ centré sur la valeur moyenne 50 contient 95 % des valeurs y_i ;
- pour $k_e = 2$:
l'intervalle $[\bar{y} - 2s(Y), \bar{y} + 2s(Y)] = [30 ; 70]$ centré sur la valeur moyenne 50 contient 95,4 % des valeurs y_i ;
- pour $k_e = 3$:
l'intervalle $[\bar{y} - 3s(Y), \bar{y} + 3s(Y)] = [20 ; 80]$ centré sur la valeur moyenne 50 contient 99,8 % des valeurs y_i .

Ces résultats nous permettent de déterminer l'incertitude associée à la valeur de la grandeur Y , en introduisant les notions d'incertitude type, de niveau de confiance et d'incertitude élargie.

Par définition, l'incertitude type $u(Y)$ est prise égale à l'écart type $s(Y)$.

Le niveau de confiance correspond à la probabilité que la valeur vraie du mesurande soit contenue dans un intervalle dont la largeur est fixée en fonction du niveau de confiance. Par exemple, un niveau de confiance de 95,4 % correspond à un intervalle de largeur égale à $4s(Y)$, c'est à dire à $k_e = 2$, centré sur la valeur moyenne. Le niveau de confiance peut donc être caractérisé par le coefficient numérique k_e appelé facteur d'élargissement. La valeur de k_e vaut généralement 1, 2 ou 3. La valeur 1,96 n'est quasiment jamais utilisée mais remplacée par la valeur 2, l'écart qui en résulte sur le calcul de l'incertitude pouvant être considéré comme négligeable. En Europe, la valeur de k_e est normalement égale à 2, mais il est prudent de toujours le vérifier ou le faire préciser (voir chapitre 4).

Ainsi, dans notre exemple, avec $k_e = 2$, la valeur vraie du mesurande a une probabilité d'environ 95 % d'être comprise dans l'intervalle [30 ; 70].

On définit ensuite l'incertitude élargie $I_{k_e}(Y) = k_e u(Y)$. Avec $k_e = 2$, valeur qui sera retenue pour l'ensemble de cet ouvrage, on a donc, pour l'exemple précédent, $I_{k_e}(Y) = I_2(Y) = 20$.

Cette incertitude élargie est utilisée pour exprimer le résultat final de mesure sous la forme :

$$Y = \bar{y} \pm k_e u(Y) \text{ m} = \bar{y} \pm I_2(Y) \text{ m} = 50 \pm 20 \text{ m} \quad \text{Eq. 5.5}$$

avec m l'unité utilisée (par exemple le mètre).

La méthode de type A permet donc de définir et d'estimer une incertitude de mesure à partir de mesurages répétés d'une grandeur. C'est une méthode très utilisée par exemple en laboratoire d'analyses pour estimer les incertitudes associées à un protocole analytique.

En hydrologie urbaine, la plupart des grandeurs mesurées in situ varient au cours du temps et ne sont donc ni reproductibles, ni prévisibles ni contrôlables par le métrologue. Par exemple, il est impossible de procéder à N mesurages consécutifs du même débit dans un collecteur car le débit varie constamment. La méthode de type A peut cependant être utilisée pour évaluer l'incertitude de mesure lors de certaines opérations d'étalonnage ou de vérification (voir chapitre 4), par exemple dans le cas d'un limnimètre où il est possible de procéder à N mesurages successifs, in situ ou en laboratoire, d'une valeur étalon. Lorsque la méthode de type A n'est pas utilisable (phénomènes non stationnaires, conditions non contrôlables par l'opérateur, coût important des mesurages, etc.), on emploie les méthodes de type B ou de Monte Carlo présentées dans les deux paragraphes suivants.

5.3.2 Méthode de type B et loi de propagation des incertitudes

La méthode de type B est fondée sur l'analyse du principe de mesure de la grandeur Y , de son modèle mathématique, des grandeurs d'influence, des informations disponibles au sujet de la variabilité possible due aux différentes sources d'incertitude et à leur influence sur le mesurage. La méthode de type B fait appel à l'expérience de l'opérateur, à des essais et à des étalonnages antérieurs, à la connaissance des phénomènes physiques mis en œuvre, ainsi qu'à des résultats partiels obtenus généralement par des méthodes de type A.

Reprenons le cas général où la valeur y d'une grandeur Y est déterminée à partir des n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$ **d'autres grandeurs ou termes correctifs** $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n$ par une relation du type :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n) \quad \text{Eq. 5.4}$$

avec y valeur brute du mesurande ;
 f relation fonctionnelle qui contient chaque grandeur, **y compris les facteurs éventuels de correction** ;
 $x_1 \dots x_n$ valeurs des n grandeurs mesurées X_k .

Chaque incertitude type $u(X_k)$ devra être estimée à partir de toutes les informations disponibles, y compris des évaluations a priori lorsqu'il n'est pas possible de procéder autrement. Notons dès à présent que la méthode de type B, en dépit des apparences, ne conduit pas à une estimation des incertitudes moins bonne que la méthode de type A. En effet, cette dernière nécessite un nombre important de mesurages pour réduire les incertitudes (voir paragraphe 5.2.1) et si les mesurages ne sont pas assez nombreux, l'écart type et donc l'incertitude élargie sur la moyenne seront élevés.

La détermination des n incertitudes type $u(X_k)$ associées aux valeurs x_k dépend de l'information et des connaissances disponibles. De nombreux cas peuvent se présenter. Les plus fréquents sont les suivants :

- **la variable X_k suit une loi normale**, dont la moyenne vaut x_k et l'écart type $\sigma(X_k)$. Dans ce cas, on prend simplement $u(X_k) = s(X_k)$. Ce type d'information résulte de l'application d'une méthode de type A ou d'une estimation fondée sur l'expérience, la méthode de mesure, les instruments utilisés, etc. (voir Figure 5.1) ;
- **la variable X_k suit une loi uniforme** : cela correspond au cas où l'information est limitée et où on sait simplement que la valeur vraie doit se situer dans un intervalle centré sur x_k et de demi-largeur a : $[x_k - a, x_k + a]$, et que toute valeur au sein de cet intervalle est équiprobable. Cet intervalle correspond généralement aux valeurs minimale et maximale que peut prendre la variable X_k . Le calcul de l'écart type d'une loi uniforme donne :

$$u(X_k) = s(X_k) = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (\text{voir Figure 5.2}).$$

C'est notamment le cas pour un instrument vérifié et conforme à une classe d'exactitude. Par exemple, pour un mètre certifié de classe II de 1 m de longueur, les distances sont connues avec une incertitude maximale $a = 0,5$ mm, soit $u(X) = 0,28$ mm $\approx 0,3$ mm.

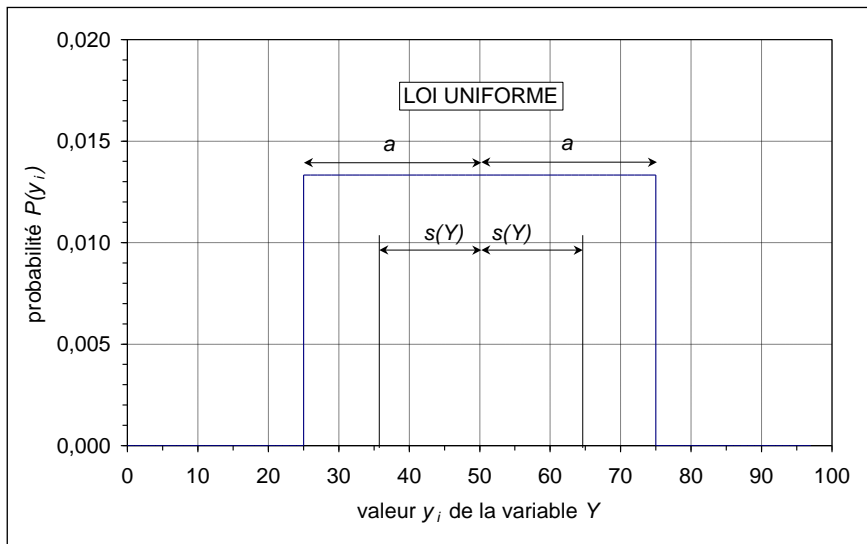


Figure 5.2 : exemple de distribution uniforme des valeurs y_i d'une variable Y, avec 100 valeurs, valeur centrale 50, demi-intervalle 25, écart type 14,43

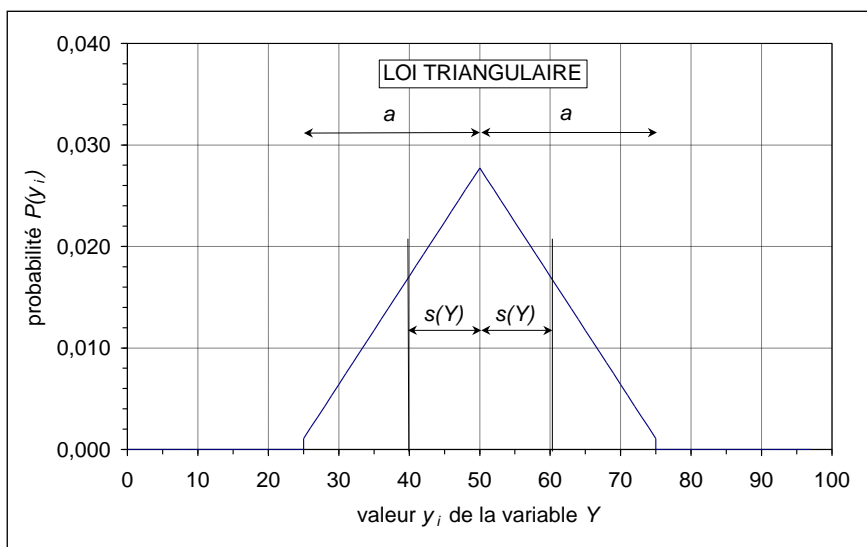


Figure 5.3 : exemple de distribution triangulaire des valeurs y_i d'une variable Y, avec 100 valeurs, valeur centrale 50, demi-intervalle 25, écart type 10,21

- **la variable X_k suit une loi triangulaire** : il s'agit d'un cas analogue au précédent, mais avec une information un peu moins limitée. La valeur vraie doit se situer dans un intervalle centré sur x_k et de demi-largeur a : $[x_k - a, x_k + a]$. Cet intervalle correspond généralement aux valeurs minimale et maximale que peut prendre la variable X_k , qui suit une loi de distribution triangulaire symétrique. Le calcul de l'écart type d'une loi triangulaire donne :

$$u(X_k) = s(X_k) = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad (\text{voir Figure 5.3}).$$

Les n incertitudes type $u(X_k)$ étant évaluées, elles permettent de déterminer l'incertitude type $u(Y)$ en appliquant la loi de propagation des incertitudes, loi établie à partir d'un développement en série de Taylor au premier ordre de la fonction f , qui s'écrit :

$$u(Y)^2 = \sum_{k=1}^n u(X_k)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial X_k} \right)^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n u(X_k, X_j) \left(\frac{\partial f}{\partial X_k} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial X_j} \right) \quad \text{Eq. 5.6}$$

avec $u(X_k, X_j) = u(X_k)u(X_j)r(X_k, X_j)$ la covariance estimée de X_k et X_j , où $r(X_k, X_j)$ est le coefficient de corrélation entre les grandeurs X_k et X_j .

L'Eq. 5.6 se simplifie dans les cas, les plus nombreux, où les grandeurs X_k ne sont pas corrélées entre elles. On a alors $u(X_k, X_j) = 0$, $\forall k$ et $\forall j$ de 1 à n , et l'équation ne contient plus que le premier terme :

$$u(Y)^2 = \sum_{k=1}^n u(X_k)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial X_k} \right)^2 \quad \text{Eq. 5.7}$$

On doit toujours néanmoins vérifier l'indépendance des variables X_k , en portant une attention particulière aux grandeurs d'influence telles que la température ou la pression qui peuvent conduire à des covariances non nulles. Le lecteur intéressé par des détails complémentaires sur la loi de propagation des incertitudes pourra se reporter utilement à la norme XP X 07-020 (1996).

Les deux équations précédentes permettent donc de déterminer $u(Y)$. En choisissant un facteur d'élargissement k_e correspondant au niveau de confiance souhaité, on définit l'incertitude élargie $I_{k_e}(Y) = k_e u(Y)$. Avec $k_e = 2$ correspondant à un niveau de confiance de l'ordre de 95 %, on note $I_{k_e}(Y) = I_2(Y) = 2u(Y)$.

Cette incertitude élargie $I_2(Y)$ est utilisée pour exprimer le résultat final de mesure sous la forme :

$$Y = y \pm k_e u(Y) \text{ m} = y \pm I_2(Y) \text{ m} \quad \text{Eq. 5.8}$$

avec m l'unité utilisée (par exemple le mètre).

Il nous paraît utile, parvenu à ce stade, de citer un court extrait de Barbier *et al.* (1996) : « Attention au fanatisme métrologique. Une incertitude connue à 20 % près est un résultat tout à fait honorable ». Cela signifie que les incertitudes $u(X_k)$ et $u(Y)$ doivent être évaluées avec des hypothèses raisonnables, en faisant preuve de rigueur et d'honnêteté intellectuelle et en essayant de ne pas entretenir d'illusions quant aux incertitudes réelles des mesurages in situ.

Un premier exemple détaillé de calcul d'incertitude selon la méthode de type B est donné au paragraphe 5.4. D'autres exemples seront également présentés au fil des chapitres de cet ouvrage.

5.3.3 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de type B fait intervenir la fonction f et ses dérivées partielles par rapport à chacune des grandeurs mesurées X_k . Le calcul n'est réalisable que dans les cas où il est possible d'explicitement une fonction f unique reliant la grandeur Y aux grandeurs X_k . Si la grandeur Y dépend des grandeurs mesurées X_k , mais que cette dépendance se présente sous une forme beaucoup plus complexe qu'une fonction f , le calcul selon la méthode de type B n'est plus possible. Dans ces conditions, on procède par simulation stochastique au moyen de la méthode de Monte-Carlo.

La méthode de Monte Carlo consiste à simuler N fois le processus de mesure à partir d'échantillons artificiels des n variables X_k , et à réaliser une analyse statistique des N valeurs de la variable Y résultant de ces N simulations. Pour que la méthode fournisse des résultats pertinents, il est nécessaire que N soit grand, c'est à dire de l'ordre de plusieurs centaines ou même plusieurs milliers.

La procédure, illustrée Figure 5.4, est la suivante :

- Pour chaque variable X_k , on constitue un échantillon artificiel de N valeurs aléatoires x_{kj} , avec j de 1 à N , non ordonnées, qui suivent une loi normale, notée $N(x_k, \sigma(X_k))$, de moyenne x_k et d'écart type $\sigma(X_k)$ - ou toute autre loi appropriée, par exemple une loi log-normale, généralement applicable pour les concentrations moyennes en polluants dans les rejets urbains de temps de pluie. Cet échantillon artificiel est fabriqué à partir d'une fonction de génération de nombres aléatoires uniformément distribués disponible dans les tableurs ou les logiciels de calcul numérique et statistique.
- La taille N des échantillons artificiels, dans le cas d'une loi normale, est déterminée de telle sorte que le rapport de l'écart type de l'échantillon $s(X_k)$ sur l'écart type de la population $\sigma(X_k)$ soit compris dans un intervalle $[a, b]$ d'amplitude $(b - a)$ tel que :

$$a \leq \frac{s(X_k)}{\sigma(X_k)} \leq b \quad \text{Eq. 5.9}$$

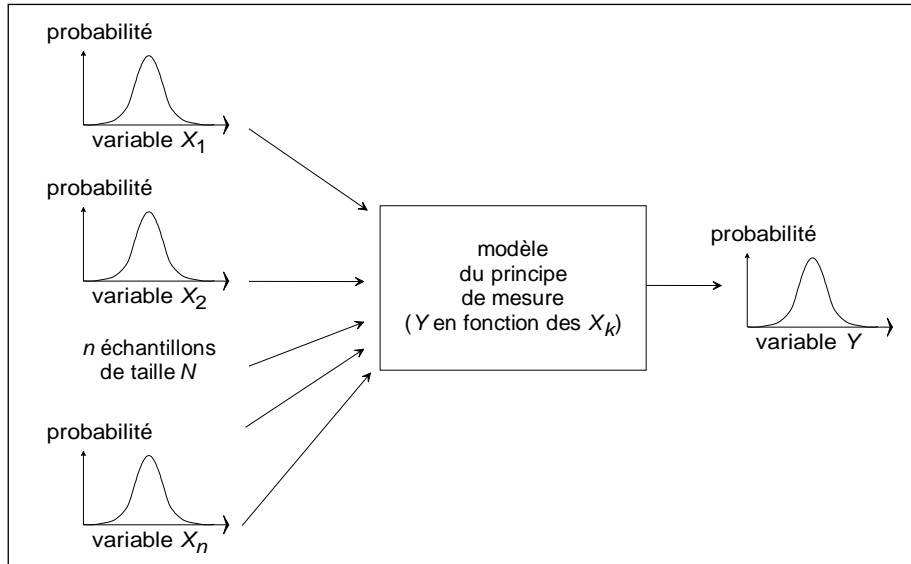


Figure 5.4 : principe de la méthode de Monte Carlo

En élevant ce rapport au carré, il devient un rapport de variances :

$$a^2 \leq \frac{s(X_k)^2}{V(X_k)} \leq b^2 \quad \text{en notant } \Delta = (b^2 - a^2) \quad \text{Eq. 5.10}$$

Dans ces conditions, pour que le rapport des variances soit compris dans l'intervalle d'amplitude Δ choisi, il faut, pour un niveau de confiance $(1 - \alpha)$ donné, déterminer par itérations successives une taille d'échantillon N telle que, avec le nombre de degrés de liberté $\nu = N - 1$, on ait des valeurs de la variable Khi-deux, notée χ^2 , qui vérifient la relation (Anonyme, 1995a – CISIA-CERESTA) :

$$\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(\nu)}{\nu} - \frac{\chi_{\alpha/2}^2(\nu)}{\nu} = \Delta \quad \text{Eq. 5.11}$$

ce qui peut également s'écrire :

$$N = 1 + \frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(N-1) - \chi_{\alpha/2}^2(N-1)}{\Delta} \quad \text{Eq. 5.12}$$

Les valeurs du χ^2 sont lues dans des tables statistiques ou, le plus souvent, calculées directement car les valeurs élevées de N sont généralement en dehors de la plage des valeurs données par les tables.

Lorsque la variable X_k ne suit pas une loi normale, les calculs précédents ne sont pas applicables et il n'existe pas de procédé analogue pour les autres lois. Une solution possible à calculer N en supposant que le loi est normale, puis de majorer N pour ne

pas risquer d'avoir une valeur par défaut. Cette majoration peut être obtenue par exemple en multipliant la valeur initiale de N par 1,5 ou 2.

- Les n échantillons correspondant aux n variables X_k doivent être indépendants, ce que l'on peut vérifier facilement à l'aide des covariances ou des coefficients de corrélation qui doivent être nuls ou tout au moins très proches de la valeur zéro.
- On dispose alors d'un nombre N de n -uplets $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj}, \dots, x_{nj})$ avec j de 1 à N . A partir de ces N n -uplets, on détermine les N valeurs correspondantes de la variable Y en utilisant le modèle décrivant le principe de mesure, que le principe de mesure soit décrit par une fonction simple comme celle donnée par l'Eq. 5.4 ou qu'il corresponde à une succession plus complexe d'opérations variées ou introduisant des non linéarités importantes (par exemple des calculs d'intégrales, de dérivées, des effets de seuils, etc.). On obtient ainsi un échantillon de N valeurs y_j de la variable Y .
- On effectue une analyse statistique de cet échantillon, afin de déterminer sa valeur moyenne \bar{y} et son écart type $s(Y)$. On prend alors, comme pour une méthode de type A, $u(Y) = s(Y)$.

L'expression finale du résultat de mesure et de son incertitude élargie est identique à celle des méthodes de type A ou B.

Un premier exemple détaillé de calcul d'incertitude selon la méthode de Monte Carlo est donné au paragraphe 5.4. Un autre exemple est présenté au chapitre 14 consacré à la détermination des débits par exploration du champ de vitesse, car cette détermination fait appel à une double intégration des valeurs x_k pour calculer la valeur y .

5.4 EXEMPLE DE CALCUL

Pour illustrer les méthodes de type B et de Monte Carlo, nous prendrons comme exemple d'application la détermination du débit Q dans une conduite circulaire de rayon $R_c = 0,5$ m. Le débit est déterminé à partir de mesurages conjoints de la hauteur d'eau h au centre du collecteur et de la vitesse d'écoulement moyenne U à travers la section mouillée S (voir Figure 5.5).

Le débit Q est calculé par la relation :

$$Q = S(h)U = R_c^2 \left[\arccos \left(1 - \frac{h}{R_c} \right) - \left(1 - \frac{h}{R_c} \right) \sin \left(\arccos \left(1 - \frac{h}{R_c} \right) \right) \right] U \quad \text{Eq. 5.13}$$

Les résultats bruts de mesure sont les suivants : $h = 0,7$ m et $U = 0,8$ m/s.

D'où $Q = 0,4697$ m³/s.

Pour les besoins de l'exemple, nous afficherons les quatre premières décimales des valeurs numériques obtenues, mais en pratique courante, compte tenu des valeurs de h et U , nous arrondirons les valeurs à deux décimales, c'est à dire $Q = 0,47$ m³/s. Cela s'applique également pour les valeurs des incertitudes type et élargie.

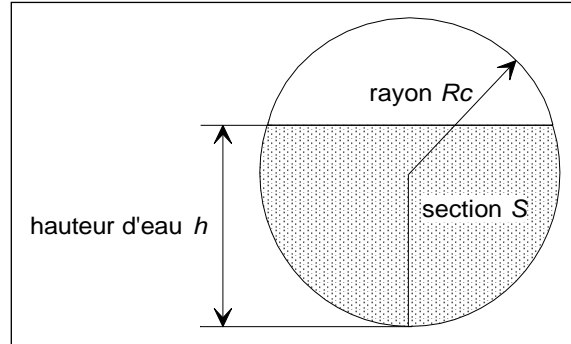


Figure 5.5 : mesurage de la hauteur d'eau h et de la vitesse U dans un collecteur circulaire de rayon R_c

5.4.1 Méthode de type B (loi de propagation des incertitudes)

En considérant que les trois variables R_c , h et U ne sont pas corrélées, la loi de propagation des incertitudes s'écrit :

$$u(Q)^2 = u(R_c)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial R_c} \right)^2 + u(h)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial h} \right)^2 + u(U)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial U} \right)^2 \quad \text{Eq. 5.14}$$

Les incertitudes type sur chacune des trois grandeurs h , R_c et U doivent être évaluées par ailleurs, soit au moyen de méthodes de types A et B, soit de manière expérimentale. Pour cet exemple, nous adopterons les valeurs suivantes, qui correspondent à des ordres de grandeurs réalistes :

- $u(R_c) = 0,002$ m ;
- $u(h) = 0,005$ m ;
- $u(U) = 0,05$ m/s.

Le calcul des dérivées partielles et de leurs valeurs numériques conduit à :

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial R_c} \right) = 2UR_c \operatorname{Arccos} \left(1 - \frac{h}{R_c} \right) - 2U \sqrt{2hR_c - h^2} = 0,8526 \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{Eq. 5.15}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial h} \right) = 2U \sqrt{2hR_c - h^2} = 0,7332 \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{Eq. 5.16}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial U} \right) = R_c^2 \operatorname{Arccos} \left(1 - \frac{h}{R_c} \right) - (R_c - h) \sqrt{2hR_c - h^2} = 0,5872 \text{ m}^2 \quad \text{Eq. 5.17}$$

L'Eq. 5.14 permet alors de calculer :

$$u(Q)^2 = 1,344 \cdot 10^{-5} + 2,908 \cdot 10^{-6} + 8,621 \cdot 10^{-4} = 8,784 \cdot 10^{-4} \text{ m}^6/\text{s}^2$$

et $u(Q) = 0,0296 \text{ m}^3/\text{s}$.

En prenant $k_e = 2$, l'incertitude élargie $I_2(Q) = 0,0593 \text{ m}^3/\text{s}$.

D'où $Q = 0,4697 \pm 0,0593 \text{ m}^3/\text{s}$,

soit une incertitude de mesure relative $\frac{I_2(Q)}{Q} = \frac{0,0593}{0,4697} = 0,126 = 12,6 \%$.

(en pratique, nous prendrions la valeur $Q = 0,47 \pm 0,03 \text{ m}^3/\text{s}$.)

Dans cet ouvrage, pour simplifier les écritures, nous utiliserons souvent pour l'incertitude relative la notation $\frac{\Delta X}{X} = \frac{I_2(X)}{X}$.

On constate, avec les valeurs numériques de cet exemple, que la contribution majeure à l'incertitude totale sur Q provient de l'incertitude sur la vitesse U .

Notons que les dérivées partielles ont été calculées analytiquement. Dans le cas où les calculs seraient trop fastidieux, il est possible de calculer des valeurs numériques approchées. La relation suivante donne une approximation à l'ordre 2 par rapport à Δx de la dérivée partielle d'une fonction f quelconque par rapport à une variable x :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad \text{Eq. 5.18}$$

Dans notre exemple on obtient pour la dérivée partielle de Q par rapport à $h = 0,7 \text{ m}$, avec $\Delta h = 0,005 \text{ m}$, $U = 0,8 \text{ m/s}$ et $R_c = 0,5 \text{ m}$:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right) = \frac{Q(h + \Delta h) - Q(h - \Delta h)}{2\Delta h} = \frac{Q(0,705) - Q(0,695)}{2 \times 0,005} = 0,733194,$$

valeur très proche de la valeur exacte 0,733212. Ces valeurs numériques des dérivées partielles, moyennant le choix d'un pas Δx approprié, sont généralement tout à fait satisfaisantes pour les calculs d'incertitude.

5.4.2 Méthode de Monte-Carlo

On utilise les mêmes données initiales que dans la méthode de type B pour construire les échantillons artificiels.

Les résultats bruts de mesure et les incertitudes type sont les suivants :

- $R_c = 0,5 \text{ m}$ $u(R_c) = 0,002 \text{ m}$;
- $h = 0,7 \text{ m}$ $u(h) = 0,005 \text{ m}$;
- $U = 0,8 \text{ m/s}$ $u(U) = 0,05 \text{ m/s}$.

La taille des échantillons artificiels est déterminée de telle sorte que l'on ait, avec un niveau de confiance de 95 %, une incertitude de 5 % sur le rapport $s(X_k)/\sigma(X_k)$, c'est à dire :

$$0,95 \leq \frac{s(X_k)}{\sigma(X_k)} \leq 1,05 \Leftrightarrow 0,90 \leq \frac{s(X_k)^2}{\sigma(X_k)^2} \leq 1,10 \quad \text{Eq. 5.19}$$

D'où $\Delta = 1,10 - 0,90 = 0,20$. Par itérations successives sur les valeurs de χ^2 , avec $\alpha = 0,05$ (c'est à dire un niveau de confiance à 95 %), on trouve $N = 769$. En effet, pour cette valeur, $\nu = N - 1 = 768$ et il vient :

$$\chi_{1-\alpha/2}^2(\nu) = \chi_{0,975}^2(768) = 846,69$$

$$\text{et } \chi_{\alpha/2}^2(\nu) = \chi_{0,025}^2(768) = 693,10$$

On vérifie donc bien :

$$\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(\nu)}{\nu} - \frac{\chi_{\alpha/2}^2(\nu)}{\nu} = \frac{846,69}{768} - \frac{693,10}{768} \approx 0,2 = \Delta \quad \text{Eq. 5.20}$$

Nous adoptons finalement une valeur de N arrondie légèrement supérieure : $N = 800$. Nous construisons ensuite trois échantillons artificiels pour les variables R_c , h et U suivant trois lois normales de paramètres respectifs $N(0,5 ; 0,002)$, $N(0,7 ; 0,005)$ et $N(0,8 ; 0,05)$. Il faut noter ici que les valeurs des échantillons artificiels ont été limitées aux valeurs comprises dans les intervalles $[x_k - 3s(X_k) ; x_k + 3s(X_k)]$ pour éviter les valeurs aberrantes (rappelons que cette largeur correspond à 99,8 % des valeurs possibles).

Ces trois distributions sont représentées Figure 5.6 à Figure 5.8. Les valeurs numériques correspondantes sont indiquées Tableau 5.1 et montrent que les écarts entre les valeurs théoriques pour les populations et les valeurs observées des échantillons artificiels sont extrêmement faibles.

Le calcul des covariances et des coefficients de corrélation confirme que les trois échantillons sont indépendants. Les résultats sont donnés dans le Tableau 5.2 et la Figure 5.9 illustre l'absence de corrélation entre les échantillons dans le cas des variables h et U .

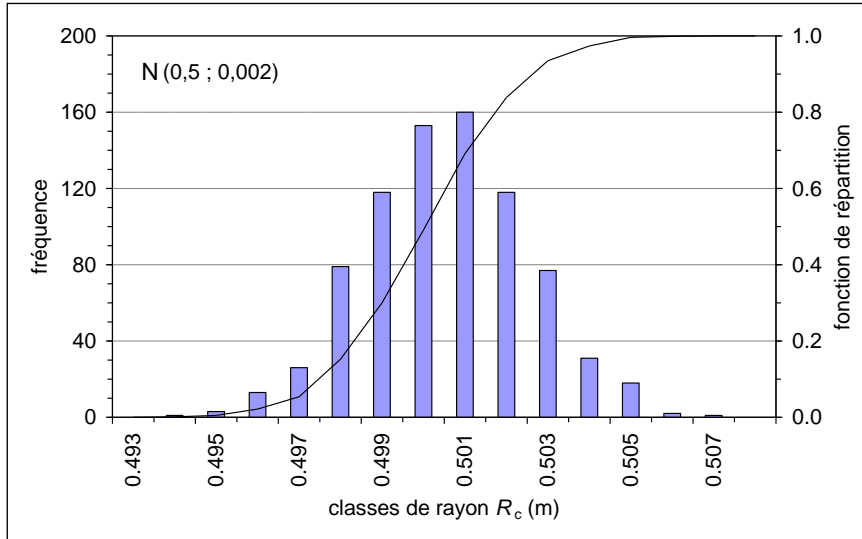


Figure 5.6 : échantillon artificiel pour la variable R_c suivant une loi $N(0,5 ; 0,002)$

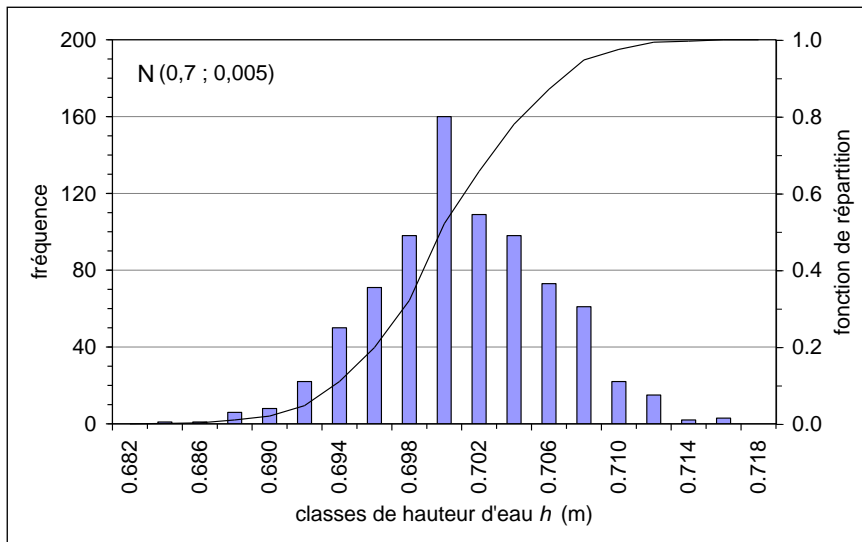


Figure 5.7 : échantillon artificiel pour la variable h suivant une loi $N(0,7 ; 0,005)$

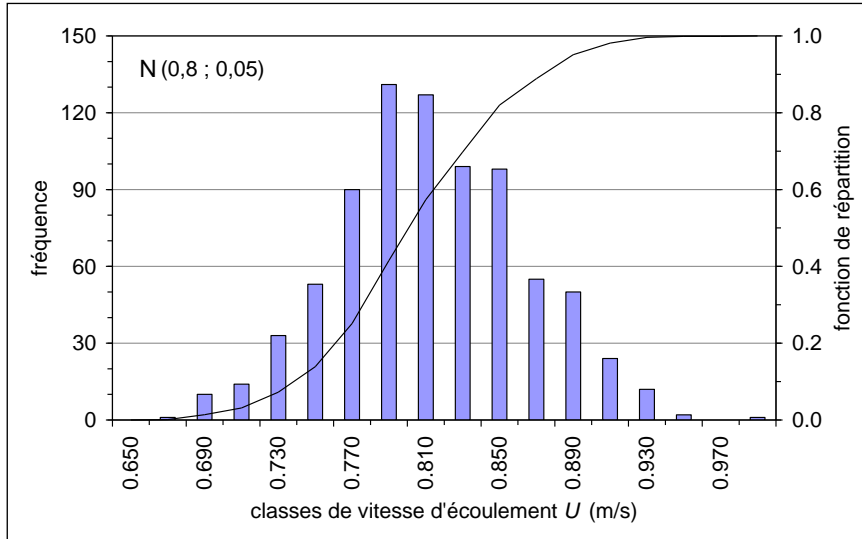


Figure 5.8 : échantillon artificiel pour la variable U suivant une loi $\mathcal{N}(0,8 ; 0,05)$

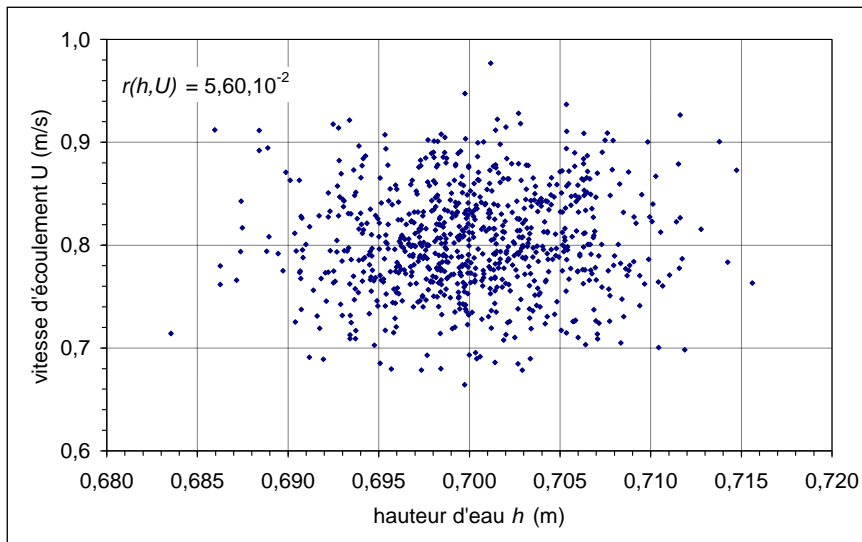


Figure 5.9 : corrélation entre les échantillons artificiels h et U

Variable X_k	R_c	h	U	Q
Unité SI	m	m	m/s	m ³ /s
$E(X_k)$	0,500 000	0,700 000	0,800 000	-
$\overline{x_k}$	0,500 059	0,700 114	0,803 386	0,4719
$V(\overline{x_k})$	2,46.10 ⁻⁶	6,24.10 ⁻⁶	6,35.10 ⁻⁵	3,79.10 ⁻⁵
$\sigma(X_k)$	0,002 000	0,005 000	0,050 000	-
$s(X_k)$	0,001 965	0,004 991	0,050 808	0,0303
$s(X_k) / \sigma(X_k)$	0,982	0,998	1,016	-

Tableau 5.1 : valeurs numériques caractéristiques des trois échantillons artificiels et de l'échantillon résultant pour la variable Q

Covariances $u(X_k, X_j)$	R_c	h	U
R_c	3,86.10 ⁻⁶		
h	1,42.10 ⁻⁷	2,49.10 ⁻⁵	
U	3,54.10 ⁻⁷	1,42.10 ⁻⁵	2,58.10 ⁻³

Coefficients de corrélation $r(X_k, X_j)$	R_c	h	U
R_c	1		
h	1,45.10 ⁻²	1	
U	3,54.10 ⁻³	5,60.10 ⁻²	1

Tableau 5.2 : covariances et coefficients de corrélation des trois variables R_c , h et U

Les résultats des 800 simulations du débit Q sont représentés Figure 5.10. Les résultats numériques sont les suivants :

$$\overline{Q} = 0,4719 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$u(Q) = 0,0303 \text{ m}^3/\text{s}.$$

En prenant $k_e = 2$, l'incertitude élargie $I_2(Q) = 0,0606 \text{ m}^3/\text{s}$.

D'où $Q = 0,4719 \pm 0,0606 \text{ m}^3/\text{s}$, soit une incertitude de mesure relative de 12,8 %.

On constate que les résultats sont quasiment identiques à ceux obtenus avec la méthode de type B, et qu'une loi normale est appropriée pour représenter la distribution des valeurs du débit Q (voir Figure 5.10).

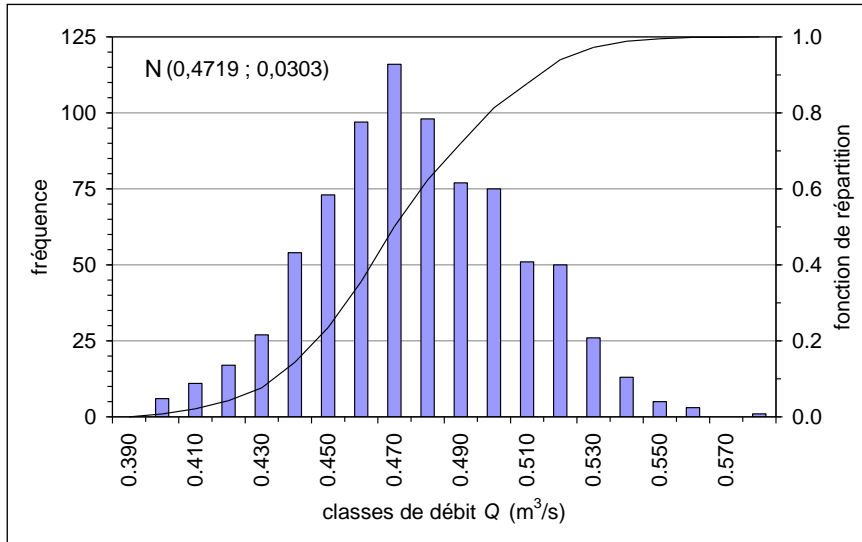


Figure 5.10 : histogramme des valeurs du débit Q

Il est évident que la méthode de Monte Carlo n'est pas indispensable pour un modèle aussi simple que celui de l'Eq. 5.13. Mais cet exemple a permis une présentation détaillée de la méthode et une comparaison avec celle de type B. On notera cependant que la méthode de Monte Carlo fournit un résultat supplémentaire intéressant : l'historique des valeurs de la grandeur Y apporte une information utile et peut permettre de mieux appréhender la distribution finale des incertitudes de mesure.