Programme UGL2 : détermination de l'incertitude du débit *Q* dans un collecteur non circulaire calculé à partir de la hauteur d'eau *h* et de la vitesse d'écoulement moyenne *U* - Version 2 du 29 mars 2009

Jean-Luc BERTRAND-KRAJEWSKI, Annabelle GALLITRE

Université de Lyon

INSA Lyon, LGCIE, 34 avenue des Arts, F-69621 Villeurbanne cedex, France

jean-luc.bertrand-krajewski@insa-lyon.fr, http://jlbkpro.free.fr

Table des matières

1. INTRODUCTION

Le programme Matlab UGL permet de calculer l'incertitude type $u(Q)$ et l'incertitude relative élargie $\Delta Q/Q = 2u(Q)/Q$ pour un débit Q ($m^3.s^{-1}$) calculé à partir du mesurage simultané d'une hauteur d'eau h (m) et d'une vitesse d'écoulement moyenne U ($m.s^{-1}$), avec une relation $S(h)$ établie par régression pour tout collecteur de section non circulaire à partir d'une série de couples de points (h_i, S_i) mesurés sur le terrain.

Ce document présente
- les principes et méthodes de calcul mis en œuvre dans le programme,
- le programme lui-même,
- deux exemples d'application.

2. METHODES

2.1 CALCUL DU DEBIT *Q*

On considère un point de mesure sur un collecteur où l'on mesure simultanément la hauteur d'eau h (m) et la vitesse d'écoulement moyenne U ($m.s^{-1}$) à travers la section mouillée S (m^2). On détermine la section mouillée S à partir de la hauteur h au moyen d'une relation $S(h)$ établie spécifiquement pour le point de mesure considéré.

Dans le cas d'un collecteur de section non circulaire (ovoïde, avec banquettes, etc.), la relation $S(h)$ peut être définie par parties (le programme `UGL` peut accepter jusqu'à $p = 4$ parties délimitées par des hauteurs seuils h_S).

Le débit Q ($m^3.s^{-1}$) est calculé par la relation

$$Q = S(h)U \qquad \text{eq. 2.1}$$

Dans le programme `UGL`, la relation $S(h)$ est représentée, pour chacune de ses parties, par un polynôme de degré 1, 2 ou 3 écrit sous la forme générale

$$S(h) = \sum_{j=0}^{m} b_j h^j \qquad \text{eq. 2.2}$$

avec b_j les coefficients du polynôme et m le degré du polynôme.

Dans le cas particulier d'un polynôme de degré $m = 3$, $S(h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3$.

2.2 Incertitude type sur le debit Q

On fait les hypothèses suivantes :

- tous les capteurs sont correctement étalonnés et périodiquement vérifiés, selon les bonnes pratiques métrologiques (raccordement aux étalons, fiche de vie, etc.) ;
- les erreurs systématiques éventuelles sont corrigées, notamment par réglage des capteurs, utilisation des fonctions d'étalonnage et tout autre moyen approprié. Seules les erreurs aléatoires sont prises en compte dans les calculs du programme `UGL`. On suppose qu'elles suivent des lois normales ;
- la section du collecteur ne présente ni dépôts, ni sédimentation ; (dans le cas contraire, voir Annexe B).
- on néglige les incertitudes sur les sections S_i mesurées *in situ* par le géomètre chargé du relevé des couples de points (h_i, S_i) utilisés dans les calculs. Dans le cas où les incertitudes sur les valeurs S_i ne sont pas négligeables, il faut soit procéder à un nouveau relevé géométrique de meilleure qualité, soit le cas échéant utiliser des méthodes de régression plus élaborées prenant en compte ces incertitudes (Bertrand-Krajewski, 2007).

Dans ces conditions, en appliquant la loi de propagation des incertitudes au débit

$$Q = US(h) = U\sum_{j=0}^{m} b_j h^j \qquad \text{eq. 2.3}$$

l'incertitude type $u(Q)$ est calculée par la relation

$$u(Q)^2 = u(U)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial U}\right)^2 + u(h)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)^2 + \sum_{j=0}^{m} u(b_j)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)^2 + 2\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}\mathrm{cov}(b_j,b_k)\left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial b_k}\right) \qquad \text{eq. 2.4}$$

avec

$u(U)$	l'incertitude type sur la vitesse ($m.s^{-1}$)
$u(b_j)$	les incertitudes types sur les coefficients b_j
$\mathrm{cov}(b_j, b_k)$	les covariances des coefficients b_j.

Seules sont prises en compte dans les calculs ultérieurs les covariances entre les coefficients b_j. Les covariances entre U, h et les coefficients b_j sont théoriquement égales à zéro et donc négligées dans les calculs.

L'établissement de la relation $S(h)$ par parties et le calcul des valeurs $u(b_j)$ et $\mathrm{cov}(b_j, b_k)$ sont présentés au paragraphe 2.3.

2.3 RELATION *S*(*h*) ET MATRICE DE COVARIANCE ASSOCIEE

On établit la relation $S(h)$ par la méthode des moindres carrés ordinaires à partir de n couples de points (h_i, S_i) expérimentaux, obtenus par un relevé *in situ* sur le site de mesure ou, à défaut, sur plan (compte tenu des nombreuses différences observées entre plan et réalité, un récolement effectué *in situ* par un géomètre est toujours préférable).

La méthode des moindres carrés ordinaires est disponible sur de nombreux logiciels du commerce (par exemple Excel®, TableCurve®, etc.) et permet d'obtenir les valeurs des coefficients b_j et de leurs incertitudes types $u(b_j)$. Cependant, la plupart de ces logiciels ne fournissent pas les valeurs des covariances $\mathrm{cov}(b_j, b_k)$ indispensables au calcul complet des incertitudes. C'est pourquoi nous présentons dans ce paragraphe les calculs correspondants.

La méthode des moindres carrés ordinaires consiste à rechercher la relation $S(h)$ qui approxime au mieux les n couples de points (h_i, S_i), en minimisant l'écart

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(S(h_i) - S_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} b_j h_i^{\,j} - S_i \right)^2 \qquad \text{eq. 2.5}$$

L'écart E est minimum lorsque $\dfrac{\partial E}{\partial b_j} = 0 \quad \forall\, j = 0{:}m$

Cela revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & h_1 & h_1^{\,2} & \cdots & h_1^{\,m} \\ 1 & h_2 & h_2^{\,2} & \cdots & h_2^{\,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & h_n & h_n^{\,2} & \cdots & h_n^{\,m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 2.6}$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit

$$\mathbf{F} \times \mathbf{b} = \mathbf{S} \qquad \text{eq. 2.7}$$

Les étapes de calcul sont les suivantes.

On procède à une décomposition QR de la matrice **F** qui est remplacée par le produit de deux matrices **Q** et **R**, ce qui permet d'écrire le système à résoudre sous la forme :

$$\mathbf{QRb} = \mathbf{S} \qquad \text{eq. 2.8}$$

Cette décomposition QR est nécessaire pour déterminer correctement les valeurs des covariances.

On procède ensuite aux calculs suivants :

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} \qquad \text{eq. 2.9}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{MS} \qquad \text{eq. 2.10}$$

Pour une valeur donnée de la hauteur d'eau h, on calcule la section mouillée $S(h)$ par la relation :

$$S(h) = \mathbf{h}^T \mathbf{b} \qquad \text{eq. 2.11}$$

avec

$$\boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} 1 \\ h \\ h^2 \\ h^3 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 2.12}$$

ce qui s'écrit aussi de manière classique

$$S(h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3 \qquad \text{eq. 2.13}$$

On calcule les résidus **e** par la relation

$$\mathbf{e} = \mathbf{Fb} - \mathbf{S} \qquad \text{eq. 2.14}$$

La somme des carrés des résidus S_r est calculée par la relation

$$S_r = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \qquad \text{eq. 2.15}$$

La matrice de covariance **C** est calculée par la relation

$$\mathbf{C} = \frac{S_r}{n - m - 1} \mathbf{MM}^T \qquad \text{eq. 2.16}$$

La matrice **C** donne directement toutes les valeurs $u(b_j)$ et cov(b_j, b_k) nécessaires aux calculs ultérieurs :

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} u(b_1)^2 & \mathrm{cov}(b_1, b_2) & \cdots & \mathrm{cov}(b_1, b_m) \\ \mathrm{cov}(b_2, b_1) & u(b_2)^2 & \cdots & \mathrm{cov}(b_2, b_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{cov}(b_m, b_1) & \mathrm{cov}(b_m, b_2) & \cdots & u(b_m)^2 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 2.17}$$

Les calculs ci-dessus sont effectués pour chacune des parties de la relation $S(h)$. Pour la première partie de la fonction, on impose le passage par l'origine $S(h = 0) = 0$, et donc $b_0 = 0$.

2.4 DETERMINATION DU DEGRE OPTIMAL DU POLYNOME $S(h)$

Afin de choisir le degré m le mieux approprié pour chacune des parties de la relation $S(h)$, on effectue un test de Snedecor. (Neuilly et Cetama, 1998; Bertrand-Krajewski *et al.*, 2000). On calcule les relations suivantes :

$$F_{1calc} = (n-3)\frac{S_{r(m=1)} - S_{r(m=2)}}{S_{r(m=2)}} \quad \text{compare le degré 1 et le degré 2} \qquad \text{eq. 2.18}$$

$$F_{2calc} = (n-4)\frac{S_{r(m=2)} - S_{r(m=3)}}{S_{r(m=3)}} \quad \text{compare le degré 2 et le degré 3.} \qquad \text{eq. 2.19}$$

Les valeurs obtenues sont ensuite comparées respectivement avec les valeurs de Snedecor suivantes :

$$F_{1theo} = F_{0.95}(1, n-3) \qquad \text{eq. 2.20}$$

$$F_{2theo} = F_{0.95}(1, n-4) \qquad \text{eq. 2.21}$$

Si $F_{1calc} < F_{1theo}$, le degré optimal sera $m = 1$. D'autre part, si $F_{2calc} < F_{2theo}$, le degré optimal sera $m = 2$. Autrement le degré optimal sera $m = 3$.

2.5 CALCUL DES HAUTEURS SEUILS CORRIGEES

Les différentes parties de la relation $S(h)$ sont délimitées par des hauteurs seuils h_{sk} (k = 0:3) fixées initialement par l'utilisateur en fonction des caractéristiques de la section d'écoulement. Les hauteurs seuils correspondent par exemple à des changements de courbure, à des décrochements, à la hauteur des banquettes, etc.

Considérons une hauteur seuil quelconque h_{sk}. Pour une hauteur d'eau $h \leq h_{sk}$, la relation $S(h)$ est notée $S_k(h)$. Pour $h \geq h_{sk}$, la relation est notée $S_{k+1}(h)$. Comme les polynômes S_k et S_{k+1} ont été établis séparément pour chaque partie, ils ne donnent pas exactement la même valeur de la section mouillée pour $h = h_{sk}$. En première approximation, on pourrait se contenter d'admettre que $S_k(h_{sk}) \approx S_{k+1}(h_{sk})$.

Pour améliorer cette approximation, deux solutions sont envisageables. La première consiste à chercher une hauteur seuil corrigée $h_{sk}*$ telle que $S_k(h_{sk}*) = S_{k+1}(h_{sk}*)$ et à utiliser ensuite cette valeur $h_{sk}*$ en remplacement de h_{sk} pour la définition des parties de $S(h)$ dans tous les calculs ultérieurs. La deuxième solution consiste à effectuer une régression sous contrainte, en imposant par exemple que $S_{k+1}(h_{sk})$ passe par le point de coordonnées $(h_{sk}, S_k(h_{sk}))$: il faut pour cela utiliser les moindres carrés pondérés.

Dans le programme `UGL`, pour des raisons de simplicité des calculs, nous appliquons la première solution. On cherche numériquement la valeur $h_{sk}*$ telle que

$$S_k(h_{sk}*) - S_{k+1}(h_{sk}*) = 0 \qquad \text{eq. 2.22}$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} 1 \\ h_{sk}* \\ h_{sk}*^2 \\ h_{sk}*^3 \end{bmatrix} \mathbf{b}_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ h_{sk}* \\ h_{sk}*^2 \\ h_{sk}*^3 \end{bmatrix} \mathbf{b}_2 = 0 \qquad \text{eq. 2.23}$$

On résout par itérations en partant de $h_{sk}*_0 = h_{sk}$ et en utilisant la fonction `fsolve` sous Matlab :

[hstar,fval]=fsolve(@(x)[1;x; x^2; x^3]'*b1-[1;x;x^2;x^3]'*b2, x0).

Dans les calculs ultérieurs, on utilisera alors :

si $h \leq h_{sk}*$ $\quad S(h) = S_k(h)$

si $h \geq h_{sk}*$ $\quad S(h) = S_{k+1}(h)$.

2.6 Calcul final de l'incertitude type $u(Q)$

L'incertitude type $u(Q)$ est due aux incertitudes sur U, sur h et sur les coefficients b_j :

$$u(Q)^2 = \underbrace{u(U)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial U}\right)^2}_{} + \underbrace{u(h)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)^2}_{} + \underbrace{\sum_{j=0}^{m} u(b_j)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)^2 + 2\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}\mathrm{cov}(b_j,b_k)\left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial b_k}\right)}_{} \qquad \text{eq. 2.24}$$

$$= \quad u_1(Q)^2 \quad + \quad u_2(Q)^2 \quad + \quad u_3(Q)^2$$

Pour simplifier les notations, on considère $S(h)$ sous la forme générale d'un polynôme de degré 3.

Pour le terme $u_1(Q)$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial U} = S(h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3 \qquad \text{eq. 2.25}$$

donc

$$u_1(Q)^2 = u(U)^2 (S(h))^2 = u(U)^2 \left(b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3\right)^2 \qquad \text{eq. 2.26}$$

Pour le terme $u_2(Q)$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = U\frac{dS(h)}{dh} = U\left(b_1 + 2b_2 h + 3b_3 h^2\right) \qquad \text{eq. 2.27}$$

donc

$$u_2(Q)^2 = u(h)^2 U^2 \left(b_1 + 2b_2 h + 3b_3 h^2\right)^2 \qquad \text{eq. 2.28}$$

Pour le terme $u_3(Q)$, on prend pour $u(b_j)$ et $\mathrm{cov}(b_j, b_k)$ les valeurs données dans la matrice **C**. Le terme $u_3(Q)$ correspond à l'incertitude type liée à la régression. On a les termes suivants :

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 1 \text{ si } b_0 \neq 0,\ \frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0 \text{ si } b_0 = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial b_1} = h,\ \frac{\partial Q}{\partial b_2} = h^2 \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial b_3} = h^3 \qquad \text{eq. 2.29}$$

donc

$$\begin{aligned} u_3(Q)^2 &= u(b_0)^2 + u(b_1)^2 h^2 + u(b_2)^2 h^4 + u(b_3)^2 h^6 + 2\,\mathrm{cov}(b_0,b_1)h + 2\,\mathrm{cov}(b_0,b_2)h^2 \\ &\quad + 2\,\mathrm{cov}(b_0,b_3)h^3 + 2\,\mathrm{cov}(b_1,b_2)h^3 + 2\,\mathrm{cov}(b_1,b_3)h^4 + 2\,\mathrm{cov}(b_2,b_3)h^5 \end{aligned} \qquad \text{eq. 2.30}$$

Sous forme matricielle, on peut écrire plus directement

$$u_3(Q)^2 = \frac{S_r}{n-m-1}\left(\boldsymbol{h}^T \times \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T \times \boldsymbol{h}\right) \qquad \text{eq. 2.31}$$

Cette dernière écriture, la plus générale quel que soit le degré m du polynôme, est utilisée dans `UGL`.

3. DONNEES NECESSAIRES AUX CALCULS

Les données nécessaires au programme `UGL` sont les suivantes :

- un fichier au format `csv` avec séparateur point-virgule (;) et UNE ligne d'en-tête contenant les données (h_i, S_i). La colonne de gauche contient les valeurs h_i (m) et la colonne de droite les valeurs S_i (m^2) relevées sur le terrain. Ce fichier peut être créé directement depuis un éditeur de texte ou sauvegardé sous ce format avec Excel®. Un exemple de fichier est donné Tableau 5.1.
- le nombre de hauteurs seuils choisi par l'utilisateur.
- les valeurs (dans l'ordre croissant) des hauteurs seuils successives h_{sk}.

Une fois les calculs préliminaires terminés, l'utilisateur peut calculer S (m^2), Q ($m^3.s^{-1}$), $u(Q)$ ($m^3.s^{-1}$) et $\Delta Q/Q$ (%) pour différents jeux de valeurs h, $u(h)$, U et $u(U)$ à saisir sous forme d'un vecteur de quatre valeurs entre crochets, avec un espace entre chaque valeur, et le point comme séparateur décimal. Par exemple, le quadruplet $h = 0.8$ m, $u(h) = 0.005$ m, $U = 0.9$ $m.s^{-1}$ et $u(U) = 0.05$ $m.s^{-1}$ doit être indiqué sous la forme [0.8 0.005 0.9 0.05], puis validé en tapant `Enter`.

Pour chaque quadruplet saisi, le programme `UGL` retourne les résultats obtenus. L'arrêt des calculs est demandé en saisissant un quadruplet avec $h = 0$. Le message `Fin des calculs` est alors affiché à l'écran.

4. RESULTATS FOURNIS PAR LE PROGRAMME

Les résultats fournis par le programme `UGL` sont de plusieurs types.

Un graphique de la fonction $S(h)$ est affiché, avec une couleur différente pour chaque partie de la fonction. Ce graphique au format Matlab peut-être copié/collé, sauvegardé, etc. par l'utilisateur.

Au fur et à mesure des calculs sur les quadruplets [h $u(h)$ U $u(U)$], le programme affiche les résultats correspondants.

Lorsque le programme est terminé, l'ensemble des résultats est disponible dans un fichier Matlab de type `cell array` nommé `resultats.m` contenant :
- cellule {1, 1} : les vecteurs **b** correspondant à chaque partie de la fonction $S(h)$
- cellules {1, 2} à {1, p+1} : les matrices **M** des p parties de la fonction $S(h)$
- cellules {1, p+2} à {1, 2p+1} : les matrices de covariance **C** des p parties de la fonction $S(h)$
- cellule {1, 2p+2} : les valeurs des hauteurs seuils corrigées h_{sk}*
- cellule {1, 2p+3} : le tableau récapitulatif des valeurs et des résultats obtenus pour tous les quadruplets [h $u(h)$ U $u(U)$], indiquant également les 3 valeurs respectives de $u_1(Q)^2$, $u_2(Q)^2$ et $u_3(Q)^2$ de l'eq. 2.24.

Le contenu du fichier `resultats.m` est également lisible dans un fichier texte nommé `resultats.dat` avec les caractéristiques suivantes :
- valeurs numériques au format exponentiel avec 15 décimales :
  par exemple, 0.002123456789012345 est noté 2.123456789012345e-3
- le séparateur est le caractère ‘espace‘, c'est-à-dire ‘ ‘.
- chaque variable est séparée de la précédente par une ligne ne contenant aucune valeur numérique. Voir un exemple en annexe A.

5. PREMIER EXEMPLE D'APPLICATION

On considère un collecteur du Grand Lyon type 064 à banquette dont les caractéristiques sont données Tableau 5.1 et Figure 5.1. Les points (h_i, S_i) sont contenus dans un fichier `csv` nommé `064b.csv` et représentés Figure 5.2 : on observe une rupture de pente significative pour h_S = 1.2 m. Nous proposons donc d'établir la fonction $S(h)$ en deux parties : une partie pour $h \leq 1.2$ m, l'autre partie pour $h \geq 1.2$ m.

hi (m)	Si (m2)
0	0
0.20	0.20
0.40	0.47
0.60	0.76
0.80	1.07
1.00	1.39
1.20	1.72
1.40	2.15
1.60	2.64
1.80	3.15
2.00	3.66
2.20	4.18
2.40	4.69
2.60	5.20
2.80	5.68
3.00	6.14
3.20	6.54
3.40	6.85
3.59	7.01

Tableau 5.1 : couples de valeurs (h_i, S_i) pour le collecteur type 064 à banquette

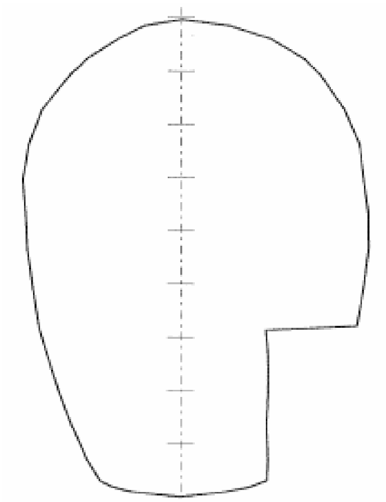


Figure 5.1 : section du collecteur type 064 à banquette

Dans la fenêtre de commande Matlab :
- lancer le programme en tapant `ugl`
- indiquer le nom du fichier : `064b`
- indiquer le nombre de hauteurs seuils : `1`
- indiquer la valeur de la hauteur seuil n° 1 : `1.2` (utiliser le point comme séparateur décimal).

Le programme effectue les premiers calculs et affiche la fonction $S(h)$ dans une fenêtre graphique (Figure 5.3). Cette figure peut-être copiée/collée et importée par exemple dans un fichier Word (Figure 5.4).

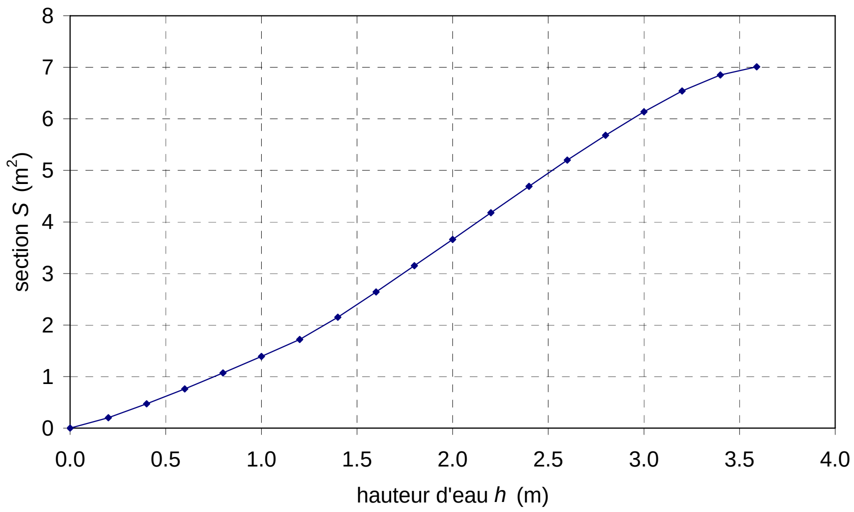


Figure 5.2 : tracé des couples de valeurs (h_i, S_i) pour le collecteur type 064 à banquette

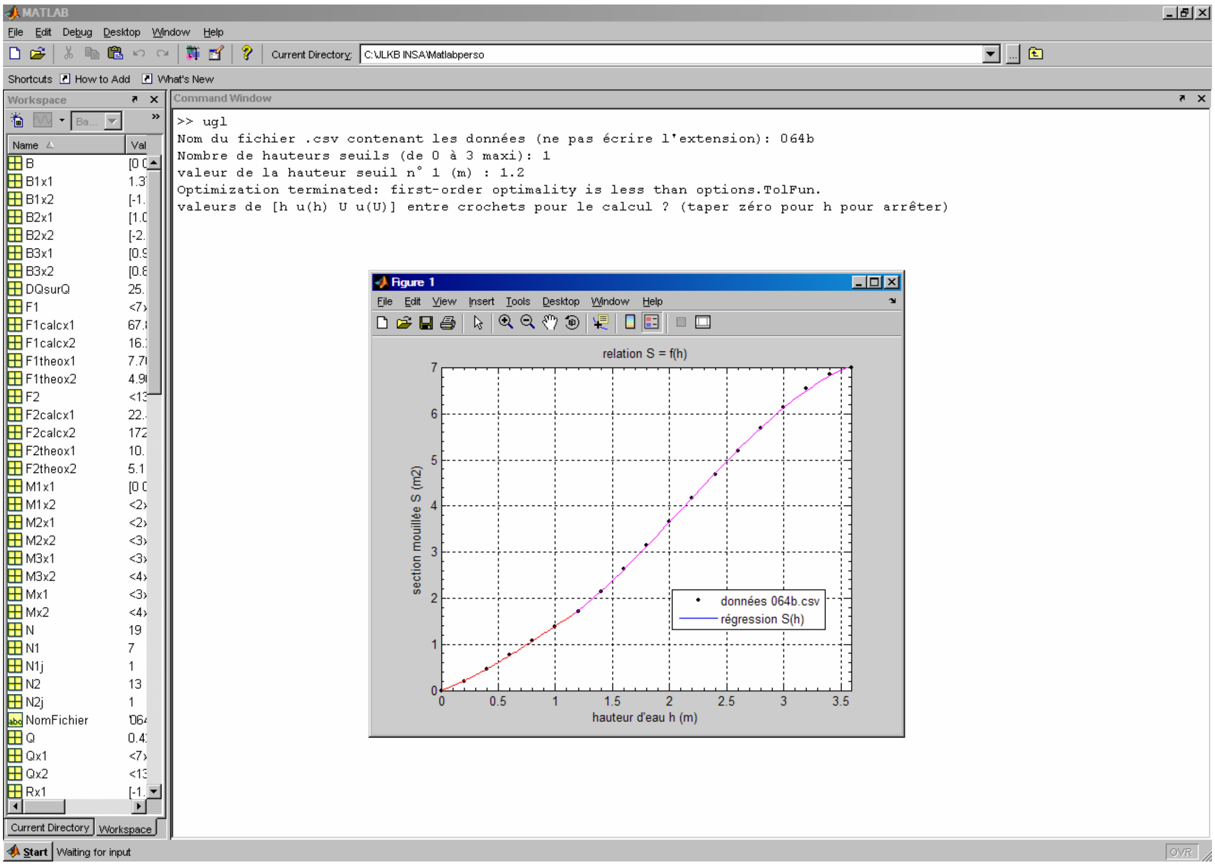


Figure 5.3 : capture d'écran après affichage de la fenêtre graphique $S(h)$

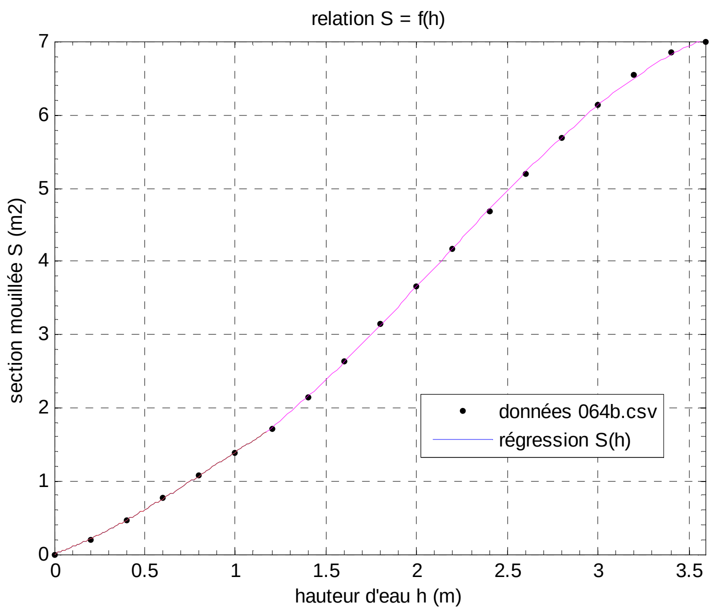


Figure 5.4 : relation *S*(*h*) en deux parties pour le collecteur type 064 à banquette

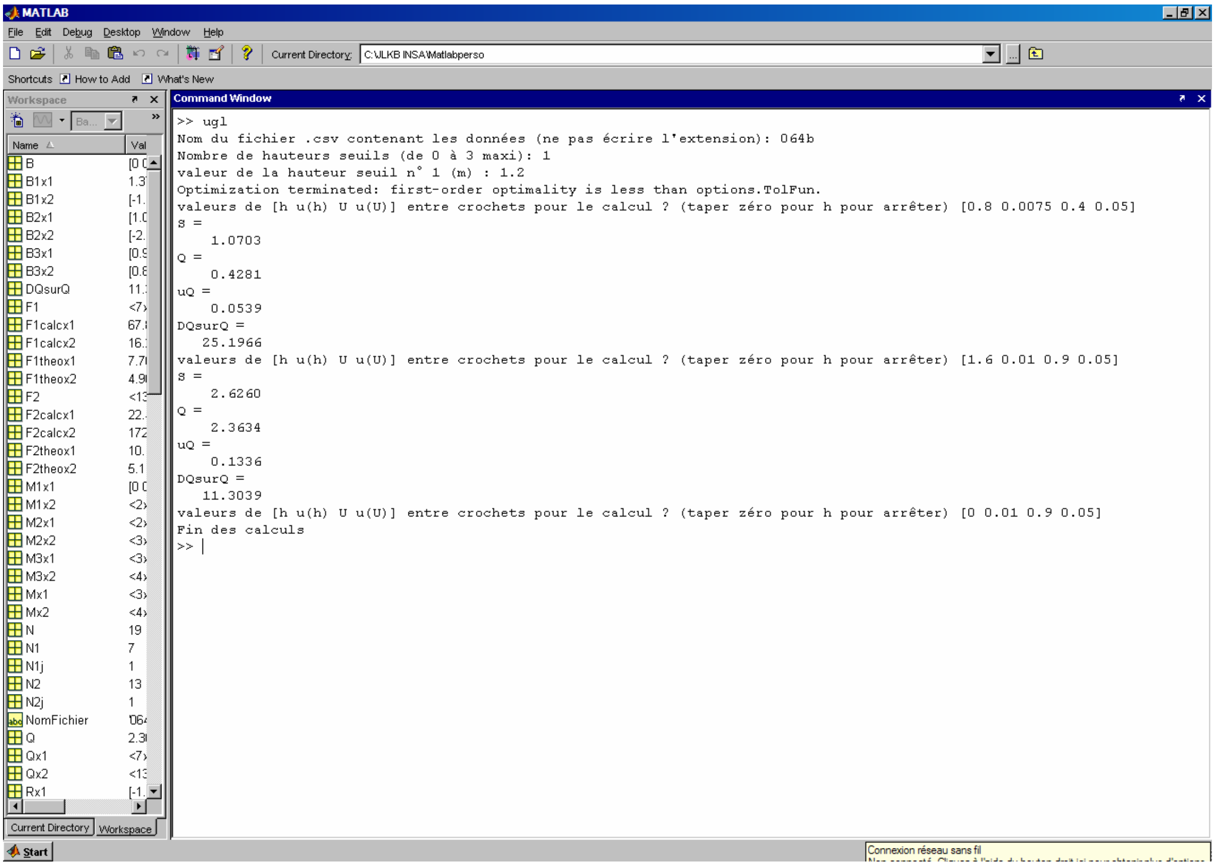


Figure 5.5 : capture d'écran après la fin des calculs

Pour la suite des calculs, on considèrera deux cas, de part et d'autre de la hauteur seuil h_S = 1.2 m :

variable	1^{er} cas	$2^{ème}$ cas
h (m)	0.8	1.6
$u(h)$ (m)	0.0075	0.0100
U (m.s^{-1})	0.4	0.90
$u(U)$ (m.s^{-1})	0.05	0.05

En retournant dans la fenêtre de commande Matlab, l'utilisateur peut effectuer plusieurs calculs successifs en fournissant au programme des quadruplets de valeurs [h $u(h)$ U $u(U)$].

Si on indique les valeurs `[0.8 0.0075 0.4 0.05]`, on obtient les résultats suivants :
- section mouillée S = 1.0703 m^2
- débit Q = 0.4281 m^3.s^{-1}
- incertitude type $u(Q)$ = 0.0539 m^3.s^{-1}
- incertitude relative élargie $\Delta Q/Q \approx$ 25 %.

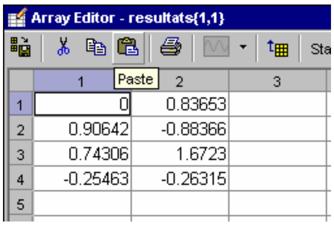
On peut effectuer un autre calcul pour le quadruplet `[1.6 0.01 0.9 0.05]`, avec les résultats suivants :
- section mouillée S = 2.6260 m^2
- débit Q = 2.3634 m^3.s^{-1}
- incertitude type $u(Q)$ = 0.1336 m^3.s^{-1}
- incertitude relative élargie $\Delta Q/Q \approx$ 11 %.

Pour terminer les calculs, on saisit zéro comme première valeur du quadruplet : `[0 0.01 0.9 0.05]`. Le programme affiche alors `Fin des calculs` comme indiqué Figure 5.5.

A l'issue des calculs, tous les résultats intermédiaires et finaux peuvent être lus et repris à partir des fichiers `resultats.m` (sous Matlab) ou `resultats.dat` (avec n'importe quel éditeur de texte : voir annexe A).

Le fichier `resultats.m` contient les données suivantes :

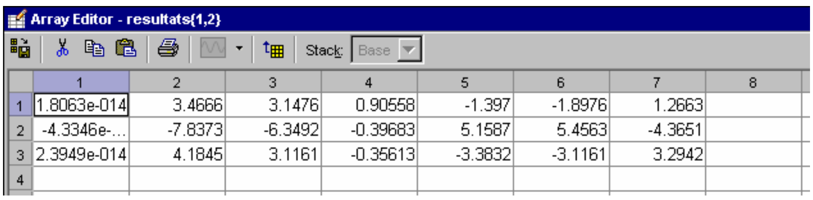
en cellule {1, 1} : les p vecteurs **b**, de gauche à droite dans l'ordre des p parties de la fonction $S(h)$


Array Editor - resultats{1,1}

	1	2	3
1	0	0.83653	
2	0.90642	-0.88366	
3	0.74306	1.6723	
4	-0.25463	-0.26315	
5			

donc $\mathbf{b}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.90642 \\ 0.74306 \\ -0.25463 \end{vmatrix}$ (polynôme de degré 3 passant par l'origine) et $\mathbf{b}_2 = \begin{vmatrix} 0.83653 \\ -0.88366 \\ 1.6723 \\ -0.26315 \end{vmatrix}$ (polynôme de degré 3).

en cellules {1, 2} et {1, 3} : les p matrices **M**, dans l'ordre des p parties de la fonction $S(h)$


Array Editor - resultats{1,2}

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.8063e-014	3.4666	3.1476	0.90558	-1.397	-1.8976	1.2663	
2	-4.3346e-...	-7.8373	-6.3492	-0.39683	5.1587	5.4563	-4.3651	
3	2.3949e-014	4.1845	3.1161	-0.35613	-3.3832	-3.1161	3.2942	
4								

Array Editor - resultats{1,3}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	6.53	1.1057	-2.0704	-3.4237	-3.3792	-2.3621	-0.7978	0.88866	2.2721	2.9272	2.4288	0.35174	-3.471
2	-8.0852	-0.77374	3.3955	5.0295	4.7349	3.1185	0.78708	-1.6525	-3.5936	-4.4292	-3.5528	-0.35735	5.3789
3	3.1971	0.12648	-1.5806	-2.193	-1.9796	-1.209	-0.15016	0.92818	1.7572	2.0681	1.5922	0.060475	-2.6173
4	-0.4063	0.0016211	0.22335	0.29628	0.25782	0.14537	-0.0036712	-0.15191	-0.26193	-0.29635	-0.21775	0.011258	0.4022
5													

en cellules {1, 4} et {1, 5} : les *p* matrices **C**, dans l'ordre des *p* parties de la fonction *S*(*h*)

Array Editor - resultats{1,4}

	1	2	3	4
1	0.0014555	-0.0034367	0.0018888	
2	-0.0034367	0.008632	-0.0049297	
3	0.0018888	-0.0049297	0.0028892	
4				

Array Editor - resultats{1,5}

	1	2	3	4	5
1	0.05657	-0.078059	0.033556	-0.0045516	
2	-0.078059	0.10919	-0.047462	0.0064954	
3	0.033556	-0.047462	0.020842	-0.0028774	
4	-0.0045516	0.0064954	-0.0028774	0.00040036	
5					

donc $\mathbf{C}_1 = \begin{vmatrix} 0.001455 & -0.003437 & 0.001889 \\ -0.003437 & 0.008632 & -0.004930 \\ 0.001889 & -0.004930 & 0.002889 \end{vmatrix}$ et $\mathbf{C}_2 = \begin{vmatrix} 0.056570 & -0.078058 & 0.033555 & -0.004551 \\ -0.078058 & 0.109187 & -0.047461 & 0.006495 \\ 0.033555 & -0.047461 & 0.020842 & -0.002877 \\ -0.004551 & 0.006495 & -0.002877 & 0.000400 \end{vmatrix}$

en cellule {1, 6} : la hauteur seuil corrigée h_s*

Array Editor - resultats{1,6}

	1	2	3
1	1.1683		
2			

donc h_s* = 1.1683 m

en cellule {1,7} : les résultats des calculs pour les deux quadruplets, chaque ligne indiquant, de gauche à droite, la hauteur d'eau *h*, l'incertitude type *u*(*h*), la vitesse d'écoulement moyenne *U*, l'incertitude type *u*(*U*), la section mouillée *S*, le débit *Q*, les valeurs u_1Q^2, u_2Q^2 et u_3Q^2, l'incertitude type *u*(*Q*) et l'incertitude relative élargie $\Delta Q/Q$.

Array Editor - resultats{1,7}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.8	0.0075	0.4	0.05	1.0703	0.42813	0.0028639	2.3225e-005	2.1991e-005	0.053937	25.197	
2	1.6	0.01	0.9	0.05	2.626	2.3634	0.01724	0.00048494	0.00011863	0.13358	11.304	
3												

6. DEUXIEME EXEMPLE D'APPLICATION

On considère dans ce deuxième exemple un collecteur du Grand Lyon type B85 à double banquette dont les caractéristiques sont données Tableau 6.1 et Figure 6.1. Les points (h_i, S_i) sont représentés Figure 6.2 : on prendra deux hauteurs seuils h_{s1} = 0.64 m et h_{s2} = 2 m.

Dans la fenêtre de commande Matlab :
- lancer le programme en tapant `ugl`
- indiquer le nom du fichier : `b85`
- indiquer le nombre de hauteurs seuils : `2`
- indiquer la valeur de la hauteur seuil n° 1 : `0.64` (utiliser le point comme séparateur décimal)
- indiquer la valeur de la hauteur seuil n° 2 : `2.0` (utiliser le point comme séparateur décimal).

Hauteur d'eau h (m)	Surface cumulée y (m²)
0,1	0,1
0,2	0,29
0,3	0,52
0,4	0,8
0,5	1,12
0,6	1,46
0,64	1,61
0,7	1,82
0,8	2,19
0,9	2,56
1	2,93
1,1	3,3
1,2	3,66
1,3	4,03
1,4	4,4
1,5	4,77
1,6	5,13
1,7	5,5
1,8	5,87
1,9	6,24
2	6,62
2,01	6,66
2,1	7,14
2,2	7,69
2,3	8,23
2,4	8,78
2,5	9,33
2,6	9,87
2,7	10,42
2,8	10,97
2,9	11,51
3	12,05
3,2	13,13
3,4	14,18
3,6	15,2
3,8	16,2
4	17,15
4,2	18,05
4,4	18,89
4,6	19,64
4,8	20,3
5	20,81
5,2	21,1

Tableau 6.1 : couples de valeurs (h_i, S_i) pour le collecteur type B85 à double banquette

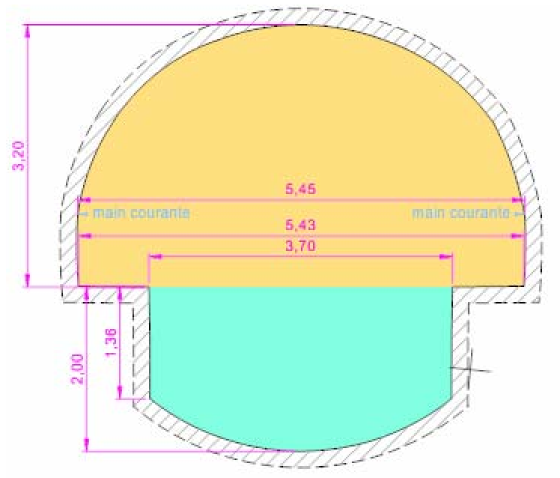


Figure 6.1 : section du collecteur type B85 à double banquette

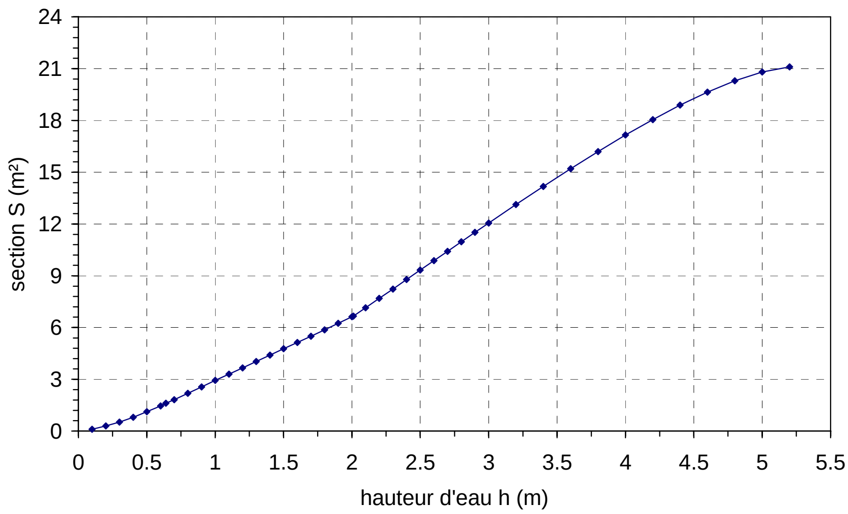


Figure 6.2 : tracé des couples de valeurs (h_i, S_i) pour le collecteur type B85 à double banquette

Le programme effectue les premiers calculs et affiche la fonction $S(h)$ dans une fenêtre graphique (Figure 6.3).

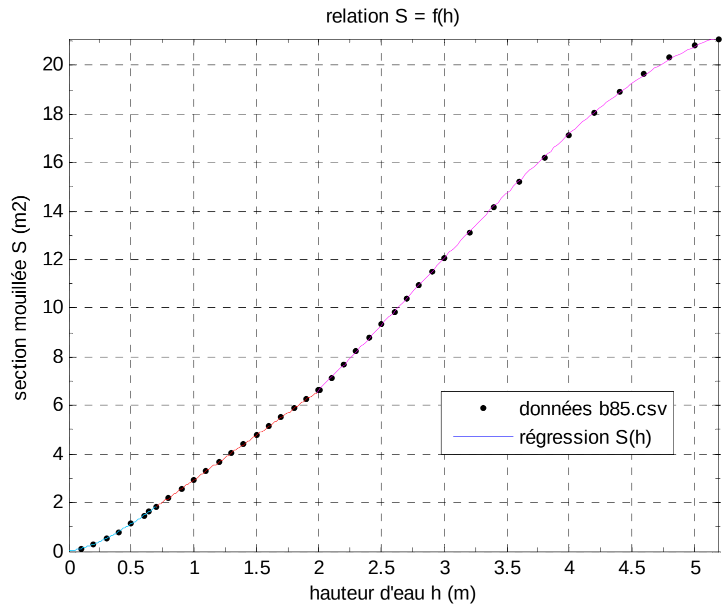


Figure 6.3 : relation $S(h)$ en trois parties pour le collecteur type B85 à double banquette

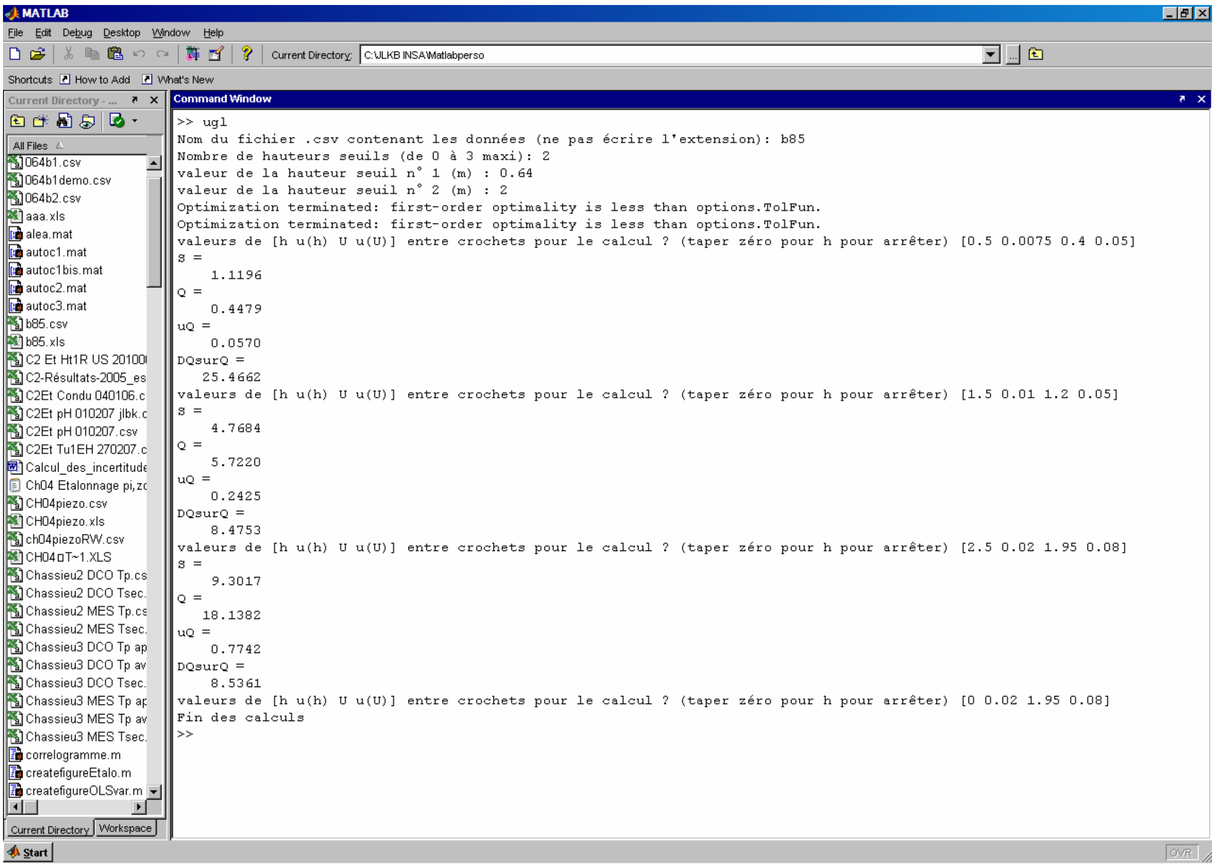


Figure 6.4 : capture d'écran après la fin des calculs

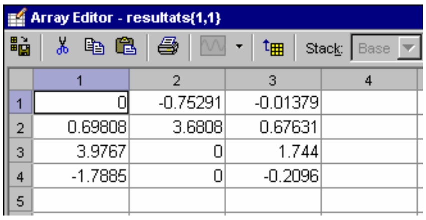
Pour la suite des calculs, on considèrera trois cas, un par partie de la fonction $S(h)$:

variable	1er cas	2ème cas	3ème cas
h (m)	0.5	1.5	2.5
$u(h)$ (m)	0.0075	0.0100	0.02
U (m.s-1)	0.4	1.20	1.95
$u(U)$ (m.s-1)	0.05	0.05	0.08

Les résultats obtenus pour les 3 quadruplets sont indiqués Figure 6.4.

Le fichier `resultats.m` contient les données suivantes :

en cellule {1, 1} : les p vecteurs **b**, de gauche à droite dans l'ordre des p parties de la fonction $S(h)$



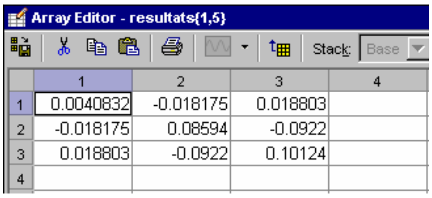
	1	2	3	4
1	0	-0.75291	-0.01379	
2	0.69808	3.6808	0.67631	
3	3.9767	0	1.744	
4	-1.7885	0	-0.2096	
5				

La fonction $S(h)$ est composée successivement d'un polynôme de degré 3 passant par l'origine, d'un segment de droite et d'un polynôme de degré 3.

en cellules {1, 2}, {1, 3} et {1, 4} : les p matrices **M**, dans l'ordre des p parties de la fonction $S(h)$

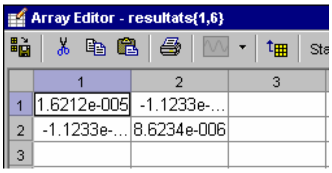
en cellules {1, 5}, {1, 6} et {1, 7} : les p matrices **C**, dans l'ordre des p parties de la fonction $S(h)$

matrice $\mathbf{C}_1$:



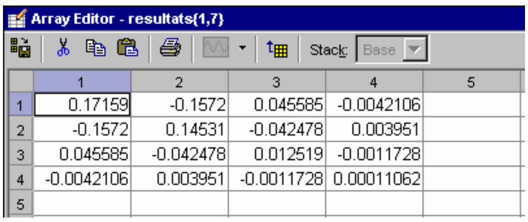
	1	2	3	4
1	0.0040832	-0.018175	0.018803	
2	-0.018175	0.08594	-0.0922	
3	0.018803	-0.0922	0.10124	
4				

matrice $\mathbf{C}_2$:



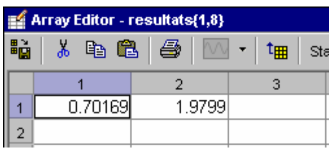
	1	2	3
1	1.6212e-005	-1.1233e-...	
2	-1.1233e-...	8.6234e-006	
3			

matrice $\mathbf{C}_3$:



	1	2	3	4	5
1	0.17159	-0.1572	0.045585	-0.0042106	
2	-0.1572	0.14531	-0.042478	0.003951	
3	0.045585	-0.042478	0.012519	-0.0011728	
4	-0.0042106	0.003951	-0.0011728	0.00011062	
5					

en cellule {1, 8} : les (p-1) hauteurs seuils corrigées h_{sk}*



	1	2	3
1	0.70169	1.9799	
2			

donc h_{s1}* = 0.70169 m et h_{s2}* = 1.9799 m.

en cellule {1,9} : les résultats des calculs pour les trois quadruplets, chaque ligne indiquant, de gauche à droite, la hauteur d'eau h, l'incertitude type $u(h)$, la vitesse d'écoulement moyenne U, l'incertitude type $u(U)$, la section mouillée S, le débit Q, les valeurs u_1Q^2, u_2Q^2 et u_3Q^2, l'incertitude type $u(Q)$ et l'incertitude relative élargie $\Delta Q/Q$.

Array Editor - resultats{1,9}

Stack: Base

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.5	0.0075	0.4	0.05	1.1196	0.44786	0.003134	0.0001	1.7979e-005	0.057026	25.466	
2	1.5	0.01	1.2	0.05	4.7684	5.722	0.056843	0.001951	1.9142e-006	0.24248	8.4753	
3	2.5	0.02	1.95	0.08	9.3017	18.138	0.55373	0.045443	0.00013415	0.77415	8.5361	
4												

7. REFERENCES

Bertrand-Krajewski J.-L. (2007). *Programme rw23 : 2nd and 3rd order polynomial Williamson regression with uncertainties in both variables*. Villeurbanne (France): INSA-Lyon, LGCIE, user note, October 2007, 9 p.

Bertrand-Krajewski J.-L., Laplace D., Joannis C., Chebbo G. (2000). *Mesures en hydrologie urbaine et assainissement*. Paris (France) : Tec et Doc, 794 p. ISBN 2-7430-0380-4.

Neuilly M., CETAMA (1998). *Modélisation et estimation des erreurs de mesure*. Paris (France) : Technique et Documentation, 704 p. ISBN 2-7430-0272-7.

8. FICHIERS

ugl.m

createfigureUGL.m

064b.csv

b85.csv

9. ANNEXE A

Cette annexe est un copié/collé du fichier texte `resultats.dat` correspondant à l'exemple du collecteur type 064 à banquette (paragraphe 5).

```
0.000000000000000e+000 8.365296923918351e-001
9.064153439153442e-001 -8.836628606524002e-001
7.430555555555545e-001 1.672333178398791e+000
-2.546296296296298e-001 -2.631484471418251e-001

1.806275505056114e-014 3.466625966625972e+000 3.147639397639396e+000
9.055759055759038e-001 -1.397028897028899e+000 -1.897639397639396e+000
1.266280016280017e+000
-4.334584277474744e-014 -7.837301587301601e+000 -6.349206349206346e+000 -
3.968253968253928e-001 5.158730158730164e+000 5.456349206349201e+000 -
4.365079365079366e+000
2.394936948496330e-014 4.184472934472942e+000 3.116096866096864e+000 -
3.561253561253586e-001 -3.383190883190886e+000 -3.116096866096863e+000
3.294159544159544e+000

6.530030973731471e+000 1.105739638362290e+000 -2.070422616674186e+000 -
3.423656907965143e+000 -3.379164352097790e+000 -2.362146065659251e+000 -
7.978031652367295e-001 8.886632325826002e-001 2.272052011211470e+000
2.927162054062833e+000 2.428792244549514e+000 3.517414660840929e-001 -
3.470988512951160e+000
```

```
-8.085169044695459e+000 -7.737439247922647e-001 3.395548096980940e+000
5.029491654212046e+000 4.734871380488975e+000 3.118471909399524e+000
7.870778745316025e-001 -1.652526090526918e+000 -3.593555352188035e+000 -
4.429225276864060e+000 -3.552751230967123e+000 -3.573485809090080e-001
5.378858585329769e+000
3.197081973818890e+000 1.264834652399023e-001 -1.580626125796816e+000 -
2.193046279860143e+000 -1.979576477518966e+000 -1.209016199342117e+000 -
1.501649258984784e-001 9.281778622430834e-001 1.757212684513646e+000
2.068140060344423e+000 1.592160509166551e+000 6.047455041101246e-002 -
2.617301097320984e+000
-4.063012495531692e-001 1.621083629580638e-003 2.233489342996367e-001
2.962829669953944e-001 2.578238462552497e-001 1.453722366175915e-001 -
3.671197379184661e-003 -1.519057911966856e-001 -2.619308802965100e-001 -
2.963458001402758e-001 -2.177498861895898e-001 1.125752609396194e-002
4.021982108639997e-001

1.455517260190984e-003 -3.436703899666869e-003 1.888814774617248e-003
-3.436703899666869e-003 8.632002183589503e-003 -4.929698216735264e-003
1.888814774617248e-003 -4.929698216735264e-003 2.889200420064624e-003

5.657027695670484e-002 -7.805853310391152e-002 3.355580532885617e-002 -
4.551588710674629e-003
-7.805853310391150e-002 1.091874443150895e-001 -4.746159147914927e-002
6.495359443589700e-003
3.355580532885617e-002 -4.746159147914927e-002 2.084231619772924e-002 -
2.877378806086966e-003
-4.551588710674629e-003 6.495359443589700e-003 -2.877378806086966e-003
4.003574681342073e-004

1.168325920165983e+000

8.000000000000000e-001 7.500000000000000e-003 4.000000000000000e-001
5.000000000000000e-002 1.070317460317460e+000 4.281269841269840e-001
2.863948664651044e-003 2.322513231449983e-005 2.199094262586330e-005
5.393667341977448e-002 2.519657737984423e+001
1.600000000000000e+000 1.000000000000000e-002 9.000000000000000e-001
5.000000000000000e-002 2.625986012555985e+000 2.363387411300387e+000
1.723950634534921e-002 4.849424598757654e-004 1.186349126521286e-004
1.335780061158165e-001 1.130394496282088e+001
```

10. ANNEXE B POUR LE PROGRAMME UGL2

On note S_d la surface occupée par les sédiments au fond du collecteur, mesurée de manière indépendante de la hauteur d'eau.

Dans ce cas, le débit Q s'écrit :

$$Q = U\left(S(h) - S_d\right) = U\left(\sum_{j=0}^{m} b_j h^j - S_d\right) \qquad \text{eq. 10.1}$$

et l'incertitude type $u(Q)$ est calculée par la relation

$$u(Q)^2 = u(U)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial U}\right)^2 + u(h)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)^2 + \sum_{j=0}^{m} u(b_j)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)^2 + 2\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}\mathrm{cov}(b_j,b_k)\left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial b_k}\right) + u(S_d)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial S_d}\right)^2 \qquad \text{eq. 10.2}$$

Pour simplifier les notations, on considère $S(h)$ sous la forme générale d'un polynôme de degré 3.

Pour le premier terme $u_1(Q)$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial U} = S(h) - S_d = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3 - S_d \qquad \text{eq. 10.3}$$

donc

$$u_1(Q)^2 = u(U)^2 \left(S(h) - S_d\right)^2 = u(U)^2 \left(b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3 - S_d\right)^2 \qquad \text{eq. 10.4}$$

Pour le deuxième terme $u_2(Q)$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = U \frac{d(S(h) - S_d)}{dh} = U\left(b_1 + 2b_2 h + 3b_3 h^2\right) \qquad \text{eq. 10.5}$$

donc

$$u_2(Q)^2 = u(h)^2 U^2 \left(b_1 + 2b_2 h + 3b_3 h^2\right)^2 \qquad \text{eq. 10.6}$$

Pour le troisième terme $u_3(Q)$, on prend pour $u(b_j)$ et $\mathrm{cov}(b_j, b_k)$ les valeurs données dans la matrice **C**. Le terme $u_3(Q)$ correspond à l'incertitude type liée à la régression. On a les termes suivants :

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 1 \text{ si } b_0 \neq 0,\ \frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0 \text{ si } b_0 = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial b_1} = h,\ \frac{\partial Q}{\partial b_2} = h^2 \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial b_3} = h^3 \qquad \text{eq. 10.7}$$

donc

$$\begin{aligned} u_3(Q)^2 = {} & u(b_0)^2 + u(b_1)^2 h^2 + u(b_2)^2 h^4 + u(b_3)^2 h^6 + 2\,\mathrm{cov}(b_0, b_1) h + 2\,\mathrm{cov}(b_0, b_2) h^2 \\ & + 2\,\mathrm{cov}(b_0, b_3) h^3 + 2\,\mathrm{cov}(b_1, b_2) h^3 + 2\,\mathrm{cov}(b_1, b_3) h^4 + 2\,\mathrm{cov}(b_2, b_3) h^5 \end{aligned} \qquad \text{eq. 10.8}$$

Sous forme matricielle, on peut écrire plus directement

$$u_3(Q)^2 = \frac{S_r}{n - m - 1}\left(\boldsymbol{h}^T \times \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T \times \boldsymbol{h}\right) \qquad \text{eq. 10.9}$$

Pour le quatrième terme $u_4(Q)$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial S_d} = U \frac{d(S(h) - S_d)}{dS_d} = -U \qquad \text{eq. 10.10}$$

donc

$$u_4(Q)^2 = u(S_d)^2 U^2 \qquad \text{eq. 10.11}$$

Finalement, on a

$$u(Q)^2 = u_1(Q)^2 + u_2(Q)^2 + u_3(Q)^2 + u_4(Q)^2 \qquad \text{eq. 10.12}$$